Rang et nombre de points périodiques des FDS

Maximilien Gadouleau
Durham University

CIRM, Marseille
2017-01-04

Organisation

Organisation

Notations

Soit $q \geq 2$ un entier et $[q] = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ l'alphabet.

Soit n un entier positif. On dénote $V = \{1, \ldots, n\}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [q]^n$.

Un système dynamique fini (**FDS**) est toute fonction

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : [q]^n \to [q]^n.$$

Problème général. Étant donné certaines propriétés structurelles de f, que peut-on dire de sa dynamique ?

Propriétés structurelles d'un FDS

1. Le **graphe d'interaction** $\mathrm{G}(f)$, qui encode le réseau sous-jacent.
   Formellement, sommets : V et arc (u, v) ssi $f_v(x)$ dépend de x_u :

   $$\exists a, b \in [q]^n : \ a_i = b_i \, \forall i \neq u, \ a_u \neq b_u, \ f_v(a) \neq f_v(b).$$

   On dénote :

   $$\mathrm{F}[D, q] := \{f : [q]^n \to [q]^n, \ \mathrm{G}(f) = D\},$$
   $$\mathrm{F}(D, q) := \{f : [q]^n \to [q]^n, \ \mathrm{G}(f) \subseteq D\}.$$

2. La nature des fonctions locales f_v.
   E.g. linéaires, monotones, à seuil, etc.
3. La taille de l'alphabet q.
   Le cas booléen ($q = 2$) est populaire mais il a des dégénérescences.
4. Le mode de mise à jour.
   Ici : mode parallèle (et x devient $f(x)$).

Organisation

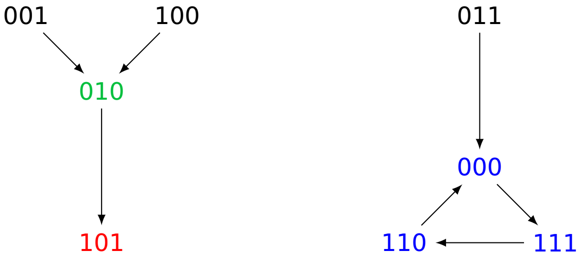
Introduction

État de l’art simplifié

Rang et rang périodique maximaux

Ici : trois propriétés dynamiques

Soit $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$ comme suit.



Points fixes: $\mathrm{Fix}(f) = \{101\}$

Points périodiques: $\mathrm{Per}(f) = \{101, 000, 111, 110\}$

Images: $\mathrm{Im\alpha}(f) = \{101, 000, 111, 110, 010\}$

Nombre de points fixes

	$[q] \to [q]$	$\mathrm{F}[D, q]$	
Minimum	0	1 si D est acyclique	(Robert 80)
		0 sinon	(Aracena, Salinas)
Moyenne	1	1	(G)
Maximum	q	$\max \lvert \mathrm{Fix}(f) \rvert \leq q^{\tau(D)}$	(Riis 07; Aracena 08)
		Résultats exacts pour certains D, par ex.	
		Si $\tau = 0$ (acyclique)	(Robert 80)
		Si $\tau = 1$	(G, Richard, Fanchon 15)
		Si $\tau = \nu^*$	(Aracena, Richard, Salinas 16+)
		Si $\tau = n$	(G, Richard, Fanchon 15)

Nombre de points périodiques

	$[q] \to [q]$	$\mathrm{F}[D, q]$
Minimum	1	1 si $q \geq 3$ (G, Richard 15) Résultats partiels pour $q = 2$ (G, Richard 15)
Moyenne	$\sim \sqrt{\pi q/2}$	1 si D est acyclique (Robert 80) Sinon ???
Maximum	q	$q^{\alpha_n(D)}$ si $q \geq 3$ (G 16+) Si $q = 2$, $\max \lvert \mathrm{Per}(f) \rvert \leq 2^{\alpha_n(D)}$ (G 16+)

Nombre d'images

	$[q] \to [q]$	$\mathrm{F}[D, q]$	
Minimum	1	???	
Moyenne	$\sim (1 - e^{-1})q$	$\log_q \mathrm{moy}\lvert\mathrm{Im}\alpha(f)\rvert \sim \alpha_1(D)$	(G 16+)
Maximum	q	$q^{\alpha_1(D)}$ si $q \geq 3$	(G 16+)
		Si $q = 2$, $\max \lvert\mathrm{Im}\alpha(f)\rvert \leq 2^{\alpha_1(D)}$	(G 16+)

Organisation

Images et points périodiques

Une **image** de f est un point x t.q. $f(y) = x$ pour quelque y.
Le **rang** de f est le nombre de ses images.

Un **point périodique** de f est un point x t.q. $f^k(x) = x$ pour quelque $k \geq 1$.
Le **rang périodique** de f est le nombre de ses points périodiques.

On normalise avec le logarithme :

$$\mathrm{im\alpha}(f) := \log_q |\mathrm{Im\alpha}(f)|, \quad \mathrm{per}(f) := \log_q |\mathrm{Per}(f)|.$$

On a donc $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Per}(f) \subseteq \mathrm{Im\alpha}(f)$ et $\mathrm{fix}(f) \leq \mathrm{per}(f) \leq \mathrm{im\alpha}(f)$.

Mais surtout, on a

$$\mathrm{per}(f) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{im\alpha}(f^k) = \mathrm{im\alpha}(f^{q^n}).$$

Rang et rang périodique maximaux I

Soit $W = (w_0, w_1, \ldots, w_k)$ et $W' = (w'_0, w'_1, \ldots, w'_k)$ deux **k-chemins** de D (i.e. (w_i, w_{i+1}) et (w'_i, w'_{i+1}) sont des arcs de D).

W et W' sont **indépendants** si $w_i \neq w'_i$ pour tout $0 \leq i \leq k$.
Soit $\alpha_k(D)$ le plus grand nombre de k-chemins indépendants deux à deux.

Théorème. (Poljak 89) $\alpha_k(D)$ est obtenu par des cycles et chemins élémentaires disjonts :

$$\alpha_k(D) = \max\left\{\sum_i |C_i| + \sum_j (|P_j| - k)\right\}.$$

En particulier, si $k \geq n$, alors

$$\alpha_k(D) = \alpha_n(D) = \max \sum_i |C_i|.$$

Rang et rang périodique maximaux II

Théorème. (G 16+) Pour tout k et tout $q \geq 2$,

$$\max\{\mathrm{ima}(f^k) : f \in \mathrm{F}(D,q)\} = \alpha_k(D).$$

De plus, pour tout k et $q \geq 3$,

$$\max\{\mathrm{ima}(f^k) : f \in \mathrm{F}[D,q]\} = \alpha_k(D).$$

Corollaire. Pour tout $q \geq 3$,

$$\mathrm{ima}[D,q] = \alpha_1(D), \quad \mathrm{per}[D,q] = \alpha_n(D).$$

En particulier, $\mathrm{F}[D,q]$ contient une permutation de $[q]^n$ sssi les sommets de D peuvent être recouverts par des cycles disjoints.

Schéma de la démonstration

Borne inf. On utilise les chemins indépendants.

1. Pour $\mathrm{F}(D, q)$, cela marche directement.
2. Pour $\mathrm{F}[D, q]$ et $q \geq 3$, on peut annuler l'influence des autres arcs.

Borne sup. On convertit le problème pour utiliser (Riis, Gadouleau 11).

1. On contruit le graphe "éclaté" D_k. Sommets : $k+1$ copies de V, $V_0, V_1, \dots, V_k$. Arcs (u_i, v_{i+1}) où $(u, v) \in D$.
2. Les chemins élémentaires de V_0 à V_k disjoints dans D_k correspondent à des k-chemins indépendants dans D.
3. Flot-max coupe-min : il existe S de taille $\alpha_k(D)$ qui disconnecte V_0 et V_k.
4. Alors f^k "dépend" des variables dans S ; ainsi $\mathrm{im}\alpha(f^k) \leq |S| = \alpha_k(D)$.

Merci !