Aix-Marseille Université
MASTER INFORMATIQUE
Algorithmique Distribuée
2016

ALGORITHMIQUE DISTRIBUÉE

Devoir à la maison

Travail Individuel

Date de diffusion : 7 mars 2016
Date Limite pour la soumission : 20 mars 2016

1 Calcul dans les arbres

L'*excentricité* notée $e(v)$ d'un sommet v dans un graphe G est la plus grande distance entre v et un sommet u de G. Formellement, on a $e(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V(G)\}$ avec $d(u, v)$ la distance entre u et v. La figure ci-dessous donne un exemple des valeurs d'excentricité pour des sommets d'un arbre.

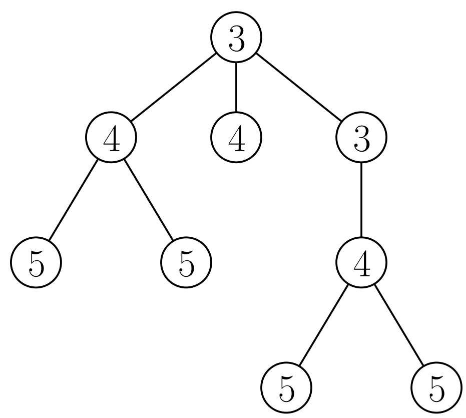

FIGURE 1 – Un arbre avec les valeurs d'excentricité de ses sommets

Pour cet exercice, on supposera que les processus peuvent communiquer par l'envoi de messages et que le réseau est asynchrone. Le réseau est un arbre (graphe acyclique connexe) n'ayant pas de racine et dont les sommets sont anonymes. On s'intéressera à la complexité en terme de nombre de messages transmis dans le pire des cas.

A. *Utiliser la technique de saturation dans les arbres pour calculer la valeur d'excentricité du ou des sommet(s) saturé(s). Donner la complexité de votre algorithme. Expliquer votre réponse*

B. *Compléter l'algorithme de la question précédente pour calculer la valeur d'excentricité de tous les sommets du réseau. Donner la complexité de votre algorithme. Expliquer votre réponse.*

2 Élection

Pour toutes ces questions, on supposera que les sommets du réseau ont des identifiants uniques (UID). De plus, chaque sommet connait son degré. Il suffira de donner une idée de l'algorithme. Le réseau est asynchrone sauf spécification contraire. Pour la complexité des algorithmes, on considèrera toujours le pire des cas possibles.

A. *Donner un algorithme efficace (en nombre de messages transmis) pour l'élection dans le réseau suivant qui est composé d'un anneau de n sommets plus une arête additionnelle entre deux sommets qui sont à distance de $n/2$ (on supposera que n est pair). Un exemple d'un tel graphe est donné par la figure ci-dessous. Quelle est la complexité de votre algorithme en terme de la nombre de messages transmis ? Expliquer votre réponse.*

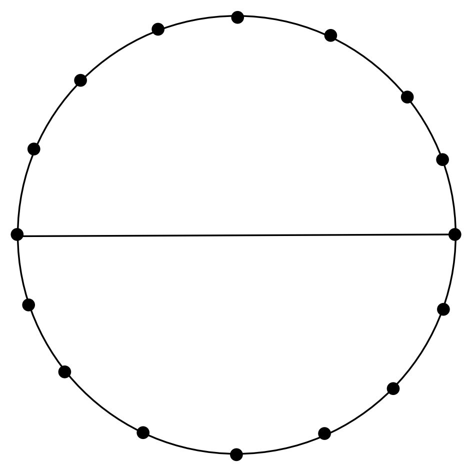

FIGURE 2 – Anneau de $n = 16$ sommets avec une corde.

B. *Donner un algorithme efficace pour l'élection dans les graphes complets (K_n), où les arêtes du graphe ont une étiquetage chordal (un exemple d'étiquetage chordal est donné par la figure ci-dessous). Prouver la correction de votre algorithme et donner sa complexité. Expliquer votre réponse.*

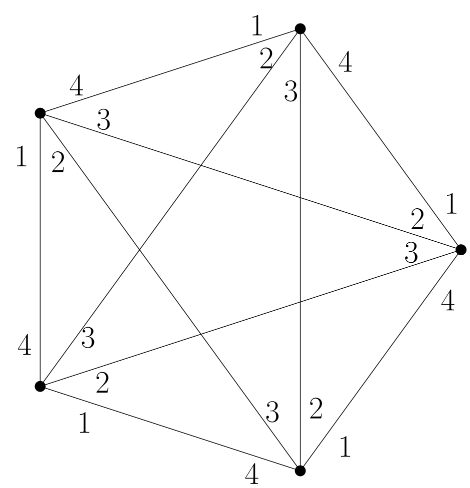

FIGURE 3 – Graphe complet K_5 avec un étiquetage chordal.

C. *Donner un algorithme efficace (en temps) pour l'élection dans les graphes quelconques. Pour cette question, on supposera que le réseau est* **synchrone** *et on s'intéressera à minimiser la complexité en temps (on peut transmettre autant de messages que l'on souhaite par ronde on ne s'intéresse pas au nombre de messages transmis). Donner la complexité en temps de votre algorithme. Est-ce que votre algorithme est optimal (dans le pire cas) ?*

3 Tolérance aux Pannes

On considére un réseau **synchrone** étant un **graphe biparti complet**, $G = K_{n/2,n/2}$ avec $n \geq 4$ sommets. Formellement, il existe une partition de V en deux sous-ensembles V_1, V_2 de $n/2$ sommets chacun, tel que $\forall u \in V_1, w \in V_2$, l'arête $\{u, w\}$ est dans G. On supposera que n est pair. La figure ci-dessous donne un exemple d'un tel graphe. Les processus du réseau n'ont pas d'identifiants uniques (UID).

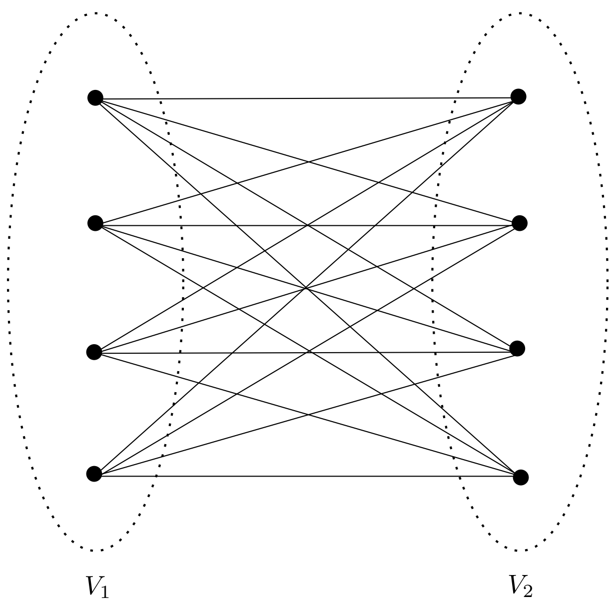

FIGURE 4 – Un graphe biparti $K_{4,4}$ avec 8 sommets.

A. Au début, chaque processus a une valeur initiale (soit 0, soit 1). On a besoin d'un algorithme qui résout le problème du consensus quand il y a au plus $f = n/2 - 1$ fautes d'omission lors de l'envoi de message à chaque ronde. Dans la première ronde, chaque processus va envoyer sa valeur à tous ses voisins. Pendant chaque ronde suivante, chaque processus va envoyer l'ensemble de toutes les valeurs qu'il a vu (les valeurs qu'il a reçues et sa propre valeur) à tous ces voisins. *Après combien de rondes peut-on résoudre le problème de consensus ? Expliquer comment les processus décident de leur valeur et prouver la correction de votre solution.*

B. *Quel est nombre maximum par ronde de fautes d'omission qu'il est possible de tolérer pour résoudre le problème de consensus dans ce réseau ? Expliquer votre réponse.*

4 Calcul avec des agents mobiles

On considère le réseau suivant qui est composé d'un anneau de n sommets plus une arête additionnelle entre deux sommets qui sont à distance de $n/2$ (on supposera que n est pair). C'est le même topologie comme dans l'exercice 2A (Voir la figure ci-dessous). Il y a k agents mobiles commençant aux sommets distincts du réseau. Les agents possèdent des identifiants uniques, $l_1 \neq l_2 \neq \cdots \neq l_k$. Au début, chaque agent connait son propre identifiant mais pas ceux des autres. On s'intéresse ici au problème du rendez-vous de tous agents dans un seul sommet du réseau.

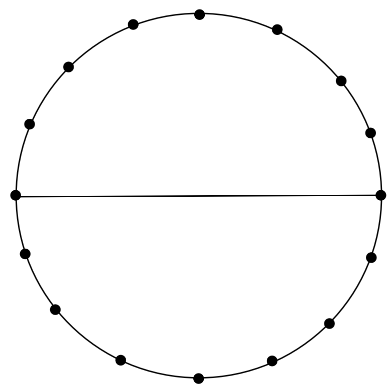

FIGURE 5 – Anneau de $n = 16$ sommets avec une corde.

A. Supposons que le réseau est **synchrone**. Chaque agent commence au même temps et un agent prend un unité de temps pour traverser une arête. *Donner un algorithme pour le rendez-vous de $k = 2$ agents. Calculer la complexité en temps de votre algorithme.*

B. Maintenant supposons que le réseau est **asynchrone**. Les agents n'ont pas le droit de marquer ou d'écrire sur les sommets du réseau. *Donner un algorithme pour le rendez-vous de $k = 3$ agents. Est-il toujours possible de résoudre le problème de rendez-vous de $k = 2$ agents dans ce cas ? Expliquer votre réponse.*