L'objectif de ce TP est de voir un exemple concret de situation où les mathématiques débouchent sur l'informatique à travers un algotithme. Pour cela, on va étudier et tester deux méthodes pour trouver une valeur approchée d'une racine d'une fonction f donnée : la méthode de dichotomie et l'algorithme de Newton.

1 La méthode de dichotomie

1.1 présentation

C'est exactement le Théorème dit de Cauchy que vous avez vu en cours, et surtout sa démonstration :

Théorème 1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que f est continue sur le segment $[a, b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$.*
Alors f possède une racine dans $]a, b[$.

\# Algorithme : $f, a, b, epsilon$
\# Variables locales : g, d, x
\# $g := a$
\# $d := b$
\#
\# Tant que $|d - g| > epsilon$, faire
\# $x := (d + g)/2$
\# si $f(x) = 0$ alors
\# Renvoyer x
\# Fin
\# sinon si $f(g).f(x) < 0$ alors
\# $d := x$
\# sinon $g := x$
\# fin si
\# fin Tant que
\#
\# Renvoyer x
\# Fin

1.2 premiers pas

- Cet algorithme suppose que les entrées vérifient les hypothèses du théorème.
- Il nous renvoie non pas la solution de $f(x) = 0$, mais une valeur *approchée*. Il serait donc judicieux de renvoyer également les valeurs de g et d afin d'obtenir un intervalle *exact* sur lequel f s'annule.
- Il peut aussi être judicieux de donner un nombre maximal d'itérations pour la boucle `Tant que`.
- Sous Maple, pour assurer un bon fonctionnement de l'algorithme, il vaut mieux prendre $epsilon > 10^{-Digits}$.

Redémontrez le théorème comme vous l'avez fait en cours.
Définissez sous Maple une procédure `dichotomie`*, testez là.*

1.3 étude de la convergence

Pour mieux étudier la vitesse de convergence de la méthode de dichotomie, modifiez légèrement la procédure `dichotomie` *de sorte qu'elle prenne en entrée un entier n et qu'elle s'arrête après n itérations. Nommons-la* `dichotomie2`.

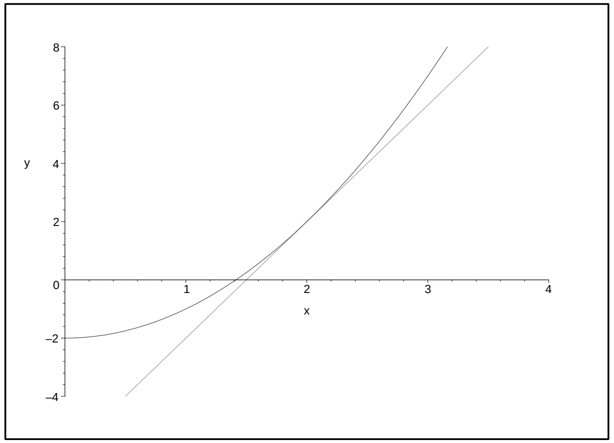
Considérons la fonction $f : x \to x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1, 2]$. On appelle x_n le nombre obtenu après n itérations et $err(n) = |x_n - \sqrt{2}|$.
Calculez x_n et $err(n)$ pour les valeurs suivantes de n : 5, 10, 15 et 20. (Commencez par mettre Digits à 50.)

2 L'algorithme de Newton

2.1 présentation

L'idée repose sur l'approximation d'une courbe par sa tangente.

la fonction $x \to x^2 - 2$ et sa tangente en 2



On rappelle l'approximation suivante qui découle directement de la définition de la dérivée : si f est dérivable en x, pour y au voisinage de x, on a : $f(y) = f(x) + (y - x) \cdot f'(x) + o(y - x)$.

Donc si y est une racine de f, et que x désigne une approximation de y, on espère que x_1, solution de $0 = f(x) + (x_1 - x)f'(x)$ sera une meilleure approximation de y. On itère ensuite le procédé.
Graphiquement, x_1 est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe $\{y = f(x)\}$ au point d'abscisse x.

2.2 questions

Vérifiez mathématiquement l'interpration graphique.
Donnez la récurrence vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ecrivez sous Maple une procédure `newton` *qui, étant donnés une fonction f, une valeur initiale x_0* et un entier n, calcule la valeur de x_n.
En prenant $f : = x \to x^2 - 2, x_0 : = 1$ ou 2 et err *définie comme en* **1.3**, *calculez x_n* et $err(n)$ *pour les valeurs suivantes de n* : 1,2,3,4,5 et 10 (*toujours avec Digits valant* 50).
Que constate-t-on par rapport à la méthode de dichotomie ?

3 Questions subsidiaires

3.1 les défauts de la méthode de Newton

Considérons la fonction $g\colon x \to x^4 - 4$ et la valeur initiale $x_0 = 100$.
Appliquez la procédure `newton` *à ces entrées pour* $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Que constatez-vous ?

Appliquez cette fois la procédure `newton` *à la fonction logarithme népérien et la valeur initiale* $e + 1$*. Que se passe-t-il pour* x_1 *?*

Enfin, appliquez la procédure`newton` *à la fonction* f *et la valeur* $x_0 = 0$*. Que se passe-t-il cette fois-ci ?*

Les différents problèmes rencontrés proviennent du fait que nous ne nous sommes pas assurés de considérer un intervalle stable par f ni que l'on ait bien f' non nulle sur cet intervalle.
En fait, la relation de récurrence qui lie les valeurs de x est de la forme $|x_{n+1} - y| \leq K|x_n - y|^2$ où K est une constante dépendant de f et de l'intervalle d'étude et y est la racine de f sur cet intervalle (s'il y'en a qu'une). Ainsi, si l'on est très proche de la racine, la convergence est très rapide mais sinon, elle est plutôt lente...

Pour régler ces problèmes, on peut commencer par "s'approcher" de la racine à l'aide de la méthode de dichotomie et ensuite seulement appliquer la méthode de Newton.
Ecrivez une procédure qui, étant donnés f, $epsilon$, a, b *et* n*, trouve une solution à* $epsilon$ *près par dichotomie dans* $[a, b]$ *puis applique* n *itérations de la méthode de Newton.*

3.2 représentation graphique

En utilisant `plot` *et* `display`*, représentez agréablement, et selon votre envie, sur un même graphique* f*, les* x_i*, et les tangentes à* f *aux points d'abscisses* x_i*.*