Élève 1 :

Cours : (1) Preuve par récurrence sur n naturel non nul du fait que, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ avec n zéros distincts dans $\mathbb{K}$, notés $x_1, \dots, x_n$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q.\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

Exercice 1
Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Élève 2 :

Cours : (6) Si P est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ de degré d entier naturel non nul, et si k est dans $\{1, \dots, d\}$, alors pour a complexe, on a :
a est un zéro d'ordre k de P ssi $\forall\, 0 \leq j \leq k-1,\ P^{(j)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$

Exercice 3 (Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$)
Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0\}$.

Exercice 4
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

1. Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a - kb$ divise $P(k)$.

Élève 3 :

Cours : (2) Existence et unicité du reste et du quotient de la division euclidienne de A par B non nul dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5 ($P' \mid P$)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 6
Soit n un entier naturel, et $P = (X+1)^n - X^n - 1$.

1. On suppose que P admet dans $\mathbb{C}$ une racine multiple z_0. Montrer que $z_0^{n-1} = (z_0+1)^{n-1} = 1$. En déduire que z_0 est égal à j ou j^2. En déduire enfin que $n-1$ est divisible par 3.
2. Cette dernière condition est-elle suffisante pour que P admette une racine multiple ?