Élève 1 :

Cours : (3) Théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique et démonstration.

Exercice 1 (Théorème de Heine)
Dans cet exercice, nous allons chercher à démontrer le Théroème de Heine.

1. Énoncer le Théorème de Heine.
2. Énoncer, si vous le connaissez, le Théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. En raisonnant par l'absurde, et en utilisant le Théorème de Bolzano-Weierstrass, démontrer le Théorème de Heine.

Exercice 2 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, et telle que quand t tend vers 0, l'on ait :

$$tf'(t) - f(t) + f(0) = O(t^2)$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Élève 2 :

Cours : (5) Si f est dérivable sur I alors f croît sur I si et seulement si f' est positive sur I.

Exercice 3 (Théorème de Darboux)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $a < b$ appartenant à I tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Dans le cas général, montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
3. Donner un exemple de fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue.

Exercice 4 (Rolle à l'infini)
Soit $f : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[A, +\infty[$, et dérivable sur $]A, +\infty[$, et admettant une limite en $+\infty$ égale à $f(A)$. Montrer qu'il existe $c \in]A, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
On pourra raisonner directement ou, plus atucieusement, se ramener au théroème de Rolle.

Élève 3 :

Cours : (4) Théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique et démonstration.

Exercice 5 (Formule de Taylor-Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, et amettant une dérivée $n+1$-ème sur $]a, b[$. A étant un réel fixé, on cnsidère la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

1. Montrer qu'il est possible de choisir A de sorte que $\varphi(a) = 0$. Dans la suite, on suppose A choisi ainsi.
2. Montrer que φ est dérivable sur $]a, b[$; pour $x \in]a, b[$, donner une expression très simple de $\varphi'(x)$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.
4. En déduire que

   $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

   Cette égalité est appelée la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n.
5. Que donne cette formule à l'ordre 0 ?