

Logique MSO pour XML

Pierre-Alain Reynier

Nous noterons $E(.,.)$ la relation d'arête et $S(.,.)$ la relation de voisins. Nous représenterons en majuscule une variable représentant un ensemble de noeuds de l'arbre (second ordre), et en minuscule une variable représentant un noeud de l'arbre (premier ordre).

Exercice 1 : Formules de base FO. Pour chacune des propriétés suivantes, donner une formule FO la caractérisant.

1. $\varphi(x)$: “ x est la racine de l'arbre”
2. $\psi(x)$: “ x est une feuille de l'arbre”
3. $\zeta(x, y)$: “ x et y sont frères” (mais pas forcément côte à côte)

Exercice 2 : Clôture réflexive et transitive de la relation d'arête. Nous allons démontrer dans cet exercice que la clôture réflexive et transitive de la relation d'arête $E(.,.)$ est exprimable en MSO. Il est aussi possible de montrer qu'elle n'est pas exprimable en FO.

Pour chacune des propriétés suivantes, donner une formule MSO la caractérisant.

1. $\varphi(x, X)$: “ x est la racine au sein de X ” (x n'a pas de père dans X)
2. $\psi(X)$: “l'ensemble X est clos par descendant”
3. $\zeta(X, x)$: “l'ensemble X est clos par ascendant, sauf pour le noeud x ”
4. $\phi(x, y)$: “ y est un descendant de x ” (c'est-à-dire $E^*(x, y)$ avec la notation usuelle pour la clôture réflexive et transitive).

Indication : En combinant les propriétés précédentes, exprimer le fait que le fait le sous-arbre issu de x contient y .

Exercice 3 : Profondeur paire. Donner une formule MSO caractérisant les noeuds d'un arbre situés à profondeur paire.

Exercice 4 : Arbres binaires.

1. Donner une formule MSO caractérisant les arbres binaires (tout noeud a exactement 0 ou 2 fils).
2. Donner une formule MSO caractérisant les arbres binaires tels que les noeuds internes sont étiquetés par le symbole b , et les feuilles par le symbole a .
3. Donner une formule MSO caractérisant les arbres binaires tels que la racine est étiquetée par le symbole a , le sous-arbre gauche est non vide et tous ses noeuds sont étiquetés par le symbole b et le sous-arbre droit est non vide et tous ses noeuds sont étiquetés par le symbole c .