Fiche de TP no 6

Les exercices marqués par l'étoile * sont plus complexes. Assurez vous d'avoir résolu les autres exercices avant de les résoudre.

Arrondis et erreurs

Exercice 1. Écrivez un script permettant de vérifier la correction de la phrase suivante : *pour sommer une liste de flottants, c'est mieux sommer la liste à partir du plut petit et en terminant par le plus grand.*
Que pensez vous de cette autre phrase : *pour sommer une liste de flottants, c'est mieux sommer la liste à partir du plut grand et en terminant par le plus petit* ?
Pouvez vous donner des justifications à l'appui de leur correction ?

Gram-Schimdt

Exercice 2. Implémentez en Python la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

— d'abord, en utilisant la méthode naïve de calcul des u_i composant la base orthogonale,

— ensuite, en utilisant la méthode de calcul des u_i par les orthogonalisations intermédiaires (les $u_i^{(\ell)}$ vus en cours).

Exercice 3. Écrivez une fonction permettant de vérifier que la deuxième implémentation de Gram-Schmidt est meilleure. Par exemple, cette fonction exécutera les deux implémentations un certain nombre de fois. A chaque fois/itération, on choisira une base à hasard (fonction `numpy.random.random()`) et on calculera l'erreur maximum (par rapport à la condition d'être une base orthonormale : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$) de chaque base retournée.

Exercice 4. * Utilisez la (ou les) fonction(s) de l'exercice 2 pour produire des graphiques illustrant la méthode d'orthonormalisation.
Par exemple, on écrira une première fonction qui prend en paramètre v_1, v_2, et représente dans un graphique les vecteurs v_1, v_2 en rouge et les vecteurs e_1, e_2 calculés par Gram-Schmidt en bleu.
On écrira une deuxième fonction pour représenter la procédure en dimension 3.

Pivot de Gauss

Exercice 5. Écrivez une version naïve de l'algorithme du pivot de Gauss où le pivot n'est pas choisi avec valeur absolu maximum.
Écrivez ensuite un script permettant de vérifier/se convaincre que l'algorithme qui choisit un pivot de valeur absolu maximum donne des solutions approchée meilleures par rapport à l'algorithme naïf.

Exercice 6. Écrivez deux fonctions dont

— la première construit, étant donné n, i, j, la matrice $C \in M(n, n)$ telle que, pour tout $A \in M(n, m)$, $C \cdot A$ est égale à la matrice A sauf pour les lignes A_i, A_j qui seront échangées ;

— la deuxième construit, étant donné n, i, j, λ, la matrice $C \in M(n.n)$ telle que, pour tout $A \in Mat(n, m)$, $C \cdot A$ est égal à la matrice A sauf pour la ligne j, qui sera égal à $A_j + \lambda A_i$.

Testez suffisamment ces deux fonctions pour vous convaincre de la correction de leur implémentation.

Exercice 7. * Modifiez le code donné en cours pour le pivot de Gauss afin de pouvoir considérer des systèmes (A, b) avec A matrice $n \times m$, avec $n \neq m$.