Programmation Fonctionnelle Fondaments de la programmation fonctionnelle : le λ-calcul non typé

Luigi Santocanale
LIF, Aix-Marseille Université
Marseille, FRANCE

6 novembre 2017

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Introduction I

- Le λ-calcul est une théorie logique des fonctions (calculables).
- Développée autour des année 1930 par Alonzo Church.
- Théorie autant puissante que celle des machines de Turing.
- On peut considérer le λ-calcul comme le *noyau du noyau* de `Haskell` et de tout autre langage de programmation fonctionnel.

Introduction II

Deux opérateurs principaux :

- *Application* : opérateur binaire (le plus prioritaire, associatif à gauche), noté par la juxtaposition (comme en Haskell) :

  $$f\ a$$

  on applique la fonction f à l'argument a (qui, dans le λ-calcul, est en effet lui même une fonction).
- *Abstraction* : opérateur binaire

  $$\lambda x.c(x)$$

  la fonction $x \mapsto c(x)$, en maths, ou `\x -> c(x)` en `Haskell`. On dit que
  - x est le *paramètre formel* de la fonction, et
  - $c(x)$ est le *corps* de la fonction.

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Les λ-termes

L'ensemble des λ-termes (ou expressions) est défini par la grammaire :

$$T := x \mid T\ T \mid \lambda x.T$$

Exemple. Les suivants sont des λ-termes :

$$\lambda x.xx\,,\ (\lambda x.(xx))y\,,\ \ldots$$

Un λ-terme de la forme $t\ s$ est appelé *application* ; $\lambda x.t$ *abstraction* .

Les λ-termes

L'ensemble des λ-termes (ou expressions) est défini par la grammaire :

$$T := x \mid T\ T \mid \lambda x.T$$

Exemple. Les suivants sont des λ-termes :

$$\lambda x.xx\,,\ (\lambda x.(xx))y\,,\ \ldots$$

Un λ-terme de la forme $t\ s$ est appelé *application* ; $\lambda x.t$ *abstraction* .

Les λ-termes

L'ensemble des λ-termes (ou expressions) est défini par la grammaire :

$$T := x \mid T\ T \mid \lambda x.T$$

Exemple. Les suivants sont des λ-termes :

$$\lambda x.xx\,,\ (\lambda x.(xx))y\,,\ \ldots$$

Un λ-terme de la forme $t\ s$ est appelé *application* ;
$\lambda x.t$ *abstraction* .

Les λ-termes

L'ensemble des λ-termes (ou expressions) est défini par la grammaire :

$$T := x \mid T\ T \mid \lambda x.T$$

Exemple. Les suivants sont des λ-termes :

$$\lambda x.xx\,,\ (\lambda x.(xx))y\,,\ \ldots$$

Un λ-terme de la forme $\begin{array}{c} t\ s \\ \lambda x.t \end{array}$ est appelé $\begin{array}{l} \textit{application}\,; \\ \textit{abstraction}\,. \end{array}$

β-réduction

On appelle redex un λ-terme de la forme

$$(\lambda x.t)\, s\,,$$

i.e. une application dont l'opérande gauche est une abstraction.

Loi fondamentale du λ-calcul :

$$(\lambda x.t)\; s \to_\beta t[s/x]$$

La fonction $\lambda x.t$ appliquée à son argument s,
s'évalue à t, le corps de la fonction,
avec le paramètre formel x remplacé par l'argument s.

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ y)\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ y)\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\underline{x}\ y)\ z})\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ y)\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\underline{x}\ y)\ z})\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ y)\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\underline{x}\ y)\ z})\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ y)\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\underline{x}\ y)\ z})\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.\underline{x\ \underline{y}})\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation

Pour evaluer un λ-terme :

- on choisit un sous-terme qui est un redex ;
- on lui applique la β-réduction ;
- on itère ce processus jusqu'à ce que on ne trouve plus de redexes.

Exemple :

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\underline{x}\ y)\ z})\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.w\ y)\ z$$

mais on aurait pu aussi choisir un autre redex :

$$(\lambda x.(\lambda y.\underline{x\ \underline{y}})\ z)\ w \rightsquigarrow_\beta (\lambda x.x\ z)\ w$$

Évaluation II

Définition formelle d'une étape d'évaluation :

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.t)\, s &\rightsquigarrow_\beta t[s/x]\,, && (\beta\text{-réduction})\\
t\, s &\rightsquigarrow_\beta t'\, s\,, && \text{si } t \rightsquigarrow_\beta t'\,,\\
t\, s &\rightsquigarrow_\beta t\, s'\,, && \text{si } s \rightsquigarrow_\beta s'\,,\\
\lambda x.t &\rightsquigarrow_\beta \lambda x.t'\,, && \text{si } t \rightsquigarrow_\beta t'\,.
\end{aligned}
$$

Definition

Un λ-terme t est un valeur s'il n'existe pas un autre λ-terme s tel que $t \not\rightsquigarrow_\beta s$.

Exemple. Une variable x est un valeur.

Évaluation II

Définition formelle d'une étape d'évaluation :

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.t)\, s &\rightsquigarrow_\beta t[s/x]\,, && (\beta\text{-réduction})\\
t\, s &\rightsquigarrow_\beta t'\, s\,, && \text{si } t \rightsquigarrow_\beta t'\,,\\
t\, s &\rightsquigarrow_\beta t\, s'\,, && \text{si } s \rightsquigarrow_\beta s'\,,\\
\lambda x.t &\rightsquigarrow_\beta \lambda x.t'\,, && \text{si } t \rightsquigarrow_\beta t'\,.
\end{aligned}
$$

Definition

Un λ-terme t est un valeur s'il n'existe pas un autre λ-terme s tel que $t \not\rightsquigarrow_\beta s$.

Exemple. Une variable x est un valeur.

Notation

On pose :

$$t \overset{n}{\rightsquigarrow}_\beta s\,,$$

s'il existe une suite

$$t = t_0 \rightsquigarrow_\beta t_1 \rightsquigarrow_\beta \ldots t_{n-1} \rightsquigarrow_\beta t_n = s\,.$$

On pose :

$$t \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta s\,,$$

s'il existe $n \geq 0$ tel que $t \overset{n}{\rightsquigarrow}_\beta s$.

Notation

On pose :

$$t \overset{n}{\rightsquigarrow}_\beta s\,,$$

s'il existe une suite

$$t = t_0 \rightsquigarrow_\beta t_1 \rightsquigarrow_\beta \ldots t_{n-1} \rightsquigarrow_\beta t_n = s\,.$$

On pose :

$$t \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta s\,,$$

s'il existe $n \geq 0$ tel que $t \overset{n}{\rightsquigarrow}_\beta s$.

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Exemple : encodage de Church des nombres naturels

$$
\begin{aligned}
\hat{0} &= \lambda f.\lambda x.x \\
\hat{1} &= \lambda f.\lambda x.f\,x \\
\hat{2} &= \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) \\
\hat{3} &= \ldots \\
SUCC &= \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\,(n\,f\,x) \\
PLUS &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\mathit{SUCC}\ \hat{1} &= \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\,(n\,f\,x)\ \ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathit{PLUS}\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\,(n\,f\,x)\ \ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.f\,x)\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\,x)\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\lambda x.f\,x\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x}\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x}\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x}\,f\,x) \\
&\overset{2}{\rightsquigarrow}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,(f\,x) \\
&\rightsquigarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
SUCC\ \hat{1} &= \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.f\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,((\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PLUS\ \hat{1}\ \hat{1} &= \lambda m.\underline{\lambda n.\lambda f.\lambda x.\underline{m}\,f\,(n\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x})\,f\,(n\,f\,x)\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda n.\underline{\lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\underline{n}\,f\,x)}\ \lambda f.\lambda x.f\,x \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\,x)\,(\lambda f.\underline{\lambda x.\underline{f}\,x}\,f\,x) \\
&\overset{2}{\leadsto}_\beta \lambda f.\lambda x.(\lambda x.\underline{f\,\underline{x}})\,(f\,x) \\
&\leadsto_\beta \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x) = \hat{2}.
\end{aligned}
$$

Des théoremes

Théorème

Une fonction

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

est calculable par une machine de Turing si et seulement si il existe un λ-terme t tel que

$$t\ \hat{n} \overset{*}{\rightsquigarrow}_{\beta} \hat{m}, \qquad \text{pour tous entiers } n \text{ et } m \text{ tels que } f(n) = m.$$

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Variables libres et variables liées

Variable libres (Free) :

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(x) &= \{x\}, \\ \mathrm{FV}(t\,s) &= \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{FV}(s), \\ \mathrm{FV}(\lambda x.t) &= \mathrm{FV}(t) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Variables liées (Bound) :

$$\begin{aligned} \mathrm{BV}(x) &= \emptyset, \\ \mathrm{BV}(t\,s) &= \mathrm{BV}(t) \cup \mathrm{BV}(s), \\ \mathrm{BV}(\lambda x.t) &= \mathrm{BV}(t) \cup \{x\}. \end{aligned}$$

Substitution (I)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \ \ (***)\,. \end{cases}$$

$(***)$: Cette règle s'applique sous la contrainte

$$\mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,,$$

pour éviter le « variable capture », c'est-à-dire qu'une variable libre dans r devient liée après substitution—comme par exemple dans :

$$(\lambda x.xy)[x/y] \overset{?}{\rightsquigarrow} \lambda x.xx\,.$$

Substitution (I)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \ \ (***)\,. \end{cases}$$

$(***)$: Cette règle s'applique sous la contrainte

$$\mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,,$$

pour éviter le « variable capture », c'est-à-dire qu'une variable libre dans r devient liée après substitution—comme par exemple dans :

$$(\lambda x.xy)[x/y] \overset{?}{\rightsquigarrow} \lambda x.xx\,.$$

Substitution (I)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \ \ (***)\,. \end{cases}$$

$(***)$: Cette règle s'applique sous la contrainte

$$\mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,,$$

pour éviter le « variable capture », c'est-à-dire qu'une variable libre dans r devient liée après substitution—comme par exemple dans :

$$(\lambda x.xy)[x/y] \overset{?}{\rightsquigarrow} \lambda x.xx\,.$$

Substitution (I)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \ \ (***)\,. \end{cases}$$

$(***)$: Cette règle s'applique sous la contrainte

$$\mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset,$$

pour éviter le « variable capture », c'est-à-dire qu'une variable libre dans r devient liée après substitution—comme par exemple dans :

$$(\lambda x.xy)[x/y] \overset{?}{\rightsquigarrow} \lambda x.xx\,.$$

α-équivalence

La substitution est partiellement définie :

comment définir $(\lambda x.(xy))[x/y]$?

On peut répondre en déclarant équivalentes les abstractions par rapport à variables différentes (invariance d'une fonction par rapport aux paramètres formels). Par exemple :

$$\lambda x.xy \sim \lambda z.zy \qquad (\text{mais } \lambda x.xy \not\sim \lambda y.yy)\,.$$

Règle générale :

$$\begin{array}{rcl} & & x \sim_\alpha x\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } s \sim_\alpha s' & \text{implique} & t\,s \sim_\alpha t'\,s'\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } z \notin \mathrm{FV}(t') \cup \mathrm{BV}(t') & \text{implique} & \lambda x.t \sim_\alpha \lambda z.t'[z/x]\,. \end{array}$$

Si $t \sim_\alpha s$, alors on dit que t et s sont α-équivalentes,

ou bien que s est une α-variante de t.

α-équivalence

La substitution est partiellement définie :

comment définir $(\lambda x.(xy))[x/y]$?

On peut répondre en déclarant équivalentes les abstractions par rapport à variables différentes (invariance d'une fonction par rapport aux paramètres formels). Par exemple :

$$\lambda x.xy \sim \lambda z.zy \qquad (\text{mais } \lambda x.xy \not\sim \lambda y.yy)\,.$$

Règle générale :

$$\begin{array}{rcl} & & x \sim_\alpha x\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } s \sim_\alpha s' & \text{implique} & t\,s \sim_\alpha t'\,s'\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } z \notin \mathrm{FV}(t') \cup \mathrm{BV}(t') & \text{implique} & \lambda x.t \sim_\alpha \lambda z.t'[z/x]\,. \end{array}$$

Si $t \sim_\alpha s$, alors on dit que t et s sont α-équivalentes,

ou bien que s est une α-variante de t.

α-équivalence

La substitution est partiellement définie :

comment définir $(\lambda x.(xy))[x/y]$?

On peut répondre en déclarant équivalentes les abstractions par rapport à variables différentes (invariance d'une fonction par rapport aux paramètres formels). Par exemple :

$$\lambda x.xy \sim \lambda z.zy \qquad (\text{mais } \lambda x.xy \not\sim \lambda y.yy)\,.$$

Règle générale :

$$\begin{array}{rcl} & & x \sim_\alpha x\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } s \sim_\alpha s' & \text{implique} & t\,s \sim_\alpha t'\,s'\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } z \notin \mathrm{FV}(t') \cup \mathrm{BV}(t') & \text{implique} & \lambda x.t \sim_\alpha \lambda z.t'[z/x]\,. \end{array}$$

Si $t \sim_\alpha s$, alors on dit que t et s sont α-équivalentes,

ou bien que s est une α-variante de t.

α-équivalence

La substitution est partiellement définie :

comment définir $(\lambda x.(xy))[x/y]$?

On peut répondre en déclarant équivalentes les abstractions par rapport à variables différentes (invariance d'une fonction par rapport aux paramètres formels). Par exemple :

$$\lambda x.xy \sim \lambda z.zy \qquad (\text{mais } \lambda x.xy \not\sim \lambda y.yy)\,.$$

Règle générale :

$$\begin{array}{rcl} & & x \sim_\alpha x\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } s \sim_\alpha s' & \text{implique} & t\,s \sim_\alpha t'\,s'\,, \\ t \sim_\alpha t' \text{ et } z \notin \mathrm{FV}(t') \cup \mathrm{BV}(t') & \text{implique} & \lambda x.t \sim_\alpha \lambda z.t'[z/x]\,. \end{array}$$

Si $t \sim_\alpha s$, alors on dit que t et s sont α-équivalentes,

ou bien que s est une α-variante de t.

Substitution (II)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \text{ et } \mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,, \\ v[r/y]\,, & \text{sinon,} \\ & \quad \text{où } v \sim_\alpha \lambda x.t \quad \text{et} \\ & \quad\quad \mathrm{BV}(v) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,. \end{cases}$$

Exemple : $\lambda x.xy \sim_\alpha \lambda z.zy$, donc :

$$(\lambda x.xy)[x/y] = (\lambda z.zy)[x/y] = \lambda z.(z[x/y]y[x/y]) = \lambda z.zx\,.$$

Substitution (II)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \text{ et } \mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,, \\ v[r/y]\,, & \text{sinon,} \\ & \quad \text{où } v \sim_\alpha \lambda x.t \quad \text{et} \\ & \quad\quad \mathrm{BV}(v) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,. \end{cases}$$

Exemple : $\lambda x.xy \sim_\alpha \lambda z.zy$, donc :

$$(\lambda x.xy)[x/y] = (\lambda z.zy)[x/y] = \lambda z.(z[x/y]y[x/y]) = \lambda z.zx\,.$$

Substitution (II)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\ s)[r/y] = t[r/y]\ s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \text{ et } \mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,, \\ v[r/y]\,, & \text{sinon,} \\ & \quad \text{où } v \sim_\alpha \lambda x.t \ \text{ et} \\ & \quad\quad \mathrm{BV}(v) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,. \end{cases}$$

Exemple : $\lambda x.xy \sim_\alpha \lambda z.zy$, donc :

$$(\lambda x.xy)[x/y] = (\lambda z.zy)[x/y] = \lambda z.(z[x/y]y[x/y]) = \lambda z.zx\,.$$

Substitution (II)

$$x[r/y] = \begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ r\,, & \text{si} \quad x = y\,; \end{cases}$$

$$(t\,s)[r/y] = t[r/y]\;s[r/y]\,;$$

$$(\lambda x.t)[r/y] = \begin{cases} \lambda x.t\,, & \text{si } x = y\,, \\ \lambda x.(t[r/y])\,, & \text{si } x \neq y \text{ et } \mathrm{BV}(\lambda x.t) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,, \\ v[r/y]\,, & \text{sinon,} \\ & \quad \text{où } v \sim_\alpha \lambda x.t \quad \text{et} \\ & \quad\quad \mathrm{BV}(v) \cap \mathrm{FV}(r) = \emptyset\,. \end{cases}$$

Exemple : $\lambda x.xy \sim_\alpha \lambda z.zy$, donc :

$$(\lambda x.xy)[x/y] = (\lambda z.zy)[x/y] = \lambda z.(z[x/y]y[x/y]) = \lambda z.zx\,.$$

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Non déterminisme

L'évaluation (β-réduction en contexte) n'est pas déterministe.

Par exemple, mais :

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda y.wy)z \arrow[dr, "\beta"] & \\
(\lambda x.(\lambda y.xy)z)w \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\beta"'] & & wz \\
 & (\lambda x.xz)w \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Non déterminisme

L'évaluation (β-réduction en contexte) n'est pas déterministe.

Par exemple, mais :

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda y.wy)z \arrow[dr, "\beta"] & \\
(\lambda x.(\lambda y.xy)z)w \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\beta"'] & & wz \\
 & (\lambda x.xz)w \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Non déterminisme

L'évaluation (β-réduction en contexte) n'est pas déterministe.

Par exemple, mais :

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda y.wy)z \arrow[dr, "\beta"] & \\
(\lambda x.(\lambda y.xy)z)w \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\beta"'] & & wz \\
 & (\lambda x.xz)w \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Confluence du λ-calcul

Theorem

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Il existe alors un λ-terme t_3 tel que $t_1 \rightsquigarrow_\beta t_3$ et $t_3 \rightsquigarrow_\beta t_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dr, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] & \\
t_0 \arrow[ur, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] \arrow[dr, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] & & t_3 \\
 & t_2 \arrow[ur, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollary

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Si t_1 et t_2 sont des valeurs, alors $t_1 = t_2$.

Confluence du λ-calcul

Theorem

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Il existe alors un λ-terme t_3 tel que $t_1 \rightsquigarrow_\beta t_3$ et $t_3 \rightsquigarrow_\beta t_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dr, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] & \\
t_0 \arrow[ur, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] \arrow[dr, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] & & t_3 \\
 & t_2 \arrow[ur, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollary

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Si t_1 et t_2 sont des valeurs, alors $t_1 = t_2$.

Confluence du λ-calcul

Theorem

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Il existe alors un λ-terme t_3 tel que $t_1 \rightsquigarrow_\beta t_3$ et $t_3 \rightsquigarrow_\beta t_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dr, squiggly, "*", "\beta"'] & \\
t_0 \arrow[ur, squiggly, "*", "\beta"'] \arrow[dr, squiggly, "*", "\beta"'] & & t_3 \\
 & t_2 \arrow[ur, squiggly, "*", "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollary

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Si t_1 et t_2 sont des valeurs, alors $t_1 = t_2$.

Confluence du λ-calcul

Theorem

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Il existe alors un λ-terme t_3 tel que $t_1 \rightsquigarrow_\beta t_3$ et $t_3 \rightsquigarrow_\beta t_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dr, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] & \\
t_0 \arrow[ur, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] \arrow[dr, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] & & t_3 \\
 & t_2 \arrow[ur, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollary

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Si t_1 et t_2 sont des valeurs, alors $t_1 = t_2$.

Confluence du λ-calcul

Theorem

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Il existe alors un λ-terme t_3 tel que $t_1 \rightsquigarrow_\beta t_3$ et $t_3 \rightsquigarrow_\beta t_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dr, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] & \\
t_0 \arrow[ur, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"] \arrow[dr, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] & & t_3 \\
 & t_2 \arrow[ur, squiggly, "\overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Corollary

Soient t_0, t_1, t_2 trois λ-termes tels que $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_1$ et $t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t_2$.
Si t_1 et t_2 sont des valeurs, alors $t_1 = t_2$.

Un λ-terme un peu bizarre

Soit

$$\omega := (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

Il n'existe aucun valeur t tel que $\omega \overset{*}{\rightsquigarrow}_\beta t$.

Plan

Introduction

Théorie élémentaire du λ-calcul

Un exemple étendu : les nombres de Church

La substitution

Confluence de la β-réduction

Stratégies d'évaluations

Comment rendre l'évaluation deterministe ?

Definition

Soit t un λ-terme. Un redex de t est un sous-terme t' de t de la forme

$$t' = (\lambda x.s)\, r\,.$$

Réduire un redex : substituer un tel t' par $s[r/x]$ dans t.
Par exemple, dans

$$t = (\lambda x.(\lambda y.xy)z)\, w$$

nous avons deux redexes :

- t : le λ-terme t lui-même ;
- $(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\, w$;

Comment rendre l'évaluation deterministe ?

Definition

Soit t un λ-terme. Un redex de t est un sous-terme t' de t de la forme

$$t' = (\lambda x.s)\ r\,.$$

Réduire un redex : substituer un tel t' par $s[r/x]$ dans t.

Par exemple, dans

$$t = (\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

nous avons deux redexes :

1. le λ-terme t lui-même :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

2. le sous-terme $(\lambda y.xy)z$

Comment rendre l'évaluation deterministe ?

Definition

Soit t un λ-terme. Un redex de t est un sous-terme t' de t de la forme

$$t' = (\lambda x.s)\ r\,.$$

Réduire un redex : substituer un tel t' par $s[r/x]$ dans t.
Par exemple, dans

$$t = (\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

nous avons deux redexes :

1. le λ-terme t lui-même :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

2. le sous-terme $t' = (\lambda y.xy)z$:

$$(\lambda y.xy)\ z.$$

Comment rendre l'évaluation deterministe ?

Definition

Soit t un λ-terme. Un redex de t est un sous-terme t' de t de la forme

$$t' = (\lambda x.s)\ r\,.$$

Réduire un redex : substituer un tel t' par $s[r/x]$ dans t.
Par exemple, dans

$$t = (\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

nous avons deux redexes :

1. le λ-terme t lui-même :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

2. le sous-terme $t' = (\lambda y.xy)z$:

$$(\lambda y.xy)\ z\,.$$

Comment rendre l'évaluation deterministe ?

Definition

Soit t un λ-terme. Un redex de t est un sous-terme t' de t de la forme

$$t' = (\lambda x.s)\ r\,.$$

Réduire un redex : substituer un tel t' par $s[r/x]$ dans t.
Par exemple, dans

$$t = (\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

nous avons deux redexes :

1. le λ-terme t lui-même :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w$$

2. le sous-terme $t' = (\lambda y.xy)z$:

$$(\lambda y.xy)\ z\,.$$

Dans un même λ-terme, deux redexes peuvent être :

1. l'un plus extérieur (resp. plus intérieur) que l'autre.

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\, w \quad \text{est plus exterieur que} \quad (\lambda y.xy)\, z\,;$$

2. l'un plus à gauche que l'autre. Dans

$$(\lambda g.\lambda x.g\,x)\,h((\lambda y.f\,y)\,z)\,,$$

$$(\lambda g.\lambda x.g\,x)\,h \quad \text{est plus à gauche que} \quad (\lambda y.f\,y)\,z\,.$$

Les stratégies d'évaluation

Ordre applicatif (évaluation par l'intérieur) : le redex le plus à l'intérieur, le plus à gauche est réduit.

Ordre normal (évaluation par l'extérieur) : le redex le plus à l'extérieur, le plus à gauche est réduit.

Exemple :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w \rightsquigarrow_\beta \ldots$$

Les stratégies d'évaluation

Ordre applicatif (évaluation par l'intérieur) : le redex le plus à l'intérieur, le plus à gauche est réduit.

Ordre normal (évaluation par l'extérieur) : le redex le plus à l'extérieur, le plus à gauche est réduit.

Exemple :

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)z)\ w \rightsquigarrow_\beta \ldots$$

Call by name : comme pour l'ordre normal, mais pas de réduction sous une abstraction.

Call by need (évaluation paresseuse) : comme pour l'ordre normal, mais en utilisant le partage.

Call by value : seulement les redexes extérieurs sont réduits, une fois que l'argument a été réduit à un valeur.

C'est-à-dire : comme pour l'ordre applicatif, mais pas de réduction sous une abstraction.