

# *Programmation Fonctionnelle*

## *Évaluation paresseuse*

Luigi Santocanale  
LIF, Aix-Marseille Université  
Marseille, FRANCE

6 novembre 2017

# Plan

Introduction

Les stratégies d'évaluation

Comparaison des stratégies

- Terminaison

- Nombre de réductions et complexité

L'évaluation, dans la pratique

- Structures infinies

- Programmation modulaire

- `foldr` et `foldl`

# Plan

## Introduction

## Les stratégies d'évaluation

## Comparaison des stratégies

- Terminaison

- Nombre de réductions et complexité

## L'évaluation, dans la pratique

- Structures infinies

- Programmation modulaire

- foldr et foldl

## Haskell et $\lambda$ -calcul

- (Le noyau de) Haskell est une extension du  $\lambda$ -calcul.

Par exemple, le nombre de Church  $\hat{2}$ ,

$$\lambda f. \lambda x. f(f x)$$

s'écrit en Haskell par l'expression

```
\f -> \x -> f (f x)
```

- En plus, Haskell est typé.

Certaines expressions du  $\lambda$ -calcul ne sont pas acceptées :

```
Prelude> (\x -> x x) (\x -> x x)
```

```
<interactive>:3:10: error:
```

```
* Occurs check: cannot construct
  the infinite type: t0 ~ t0 -> t
  Expected type: t0 -> t
  Actual type: (t0 -> t) -> t
```

# L'ordre d'évaluation

Considérez la fonction suivante :

```
inc :: Int -> Int
inc n = n + 1
```

Pour évaluer l'expression

`inc (2*3)`

nous avons deux possibilités :

```
inc (2 * 3)
-> inc 6
-> 6 + 1
-> 7
```

```
inc (2 * 3)
-> (2 * 3) + 1
-> 6 + 1
-> 7
```

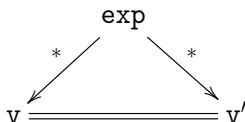
# La confluence

On démontre le fait suivant :

*si deux évaluations de la même expression **pure** Haskell  $exp$   
produisent les valeurs  $v$  et  $v'$ ,  
alors  $v=v'$ .*

On dit que l'évaluation est confluente.

En diagrammes :



## Effets de bords, non-confluence

La même propriété n'est pas vraie si on considère des expressions qui entraînent des effets de bord.

Par exemple, dans un langage où l'on peut affecter la variable  $n$ , l'expression

$$n + (n:=1)$$

peut s'évaluer à deux résultats différents, selon que l'on évalue d'abord  $n$  ou son affectation.

# Plan

Introduction

Les stratégies d'évaluation

Comparaison des stratégies

Terminaison

Nombre de réductions et complexité

L'évaluation, dans la pratique

Structures infinies

Programmation modulaire

foldr et foldl



# Redexes, informellement

Un *redex* est une sous-expression d'une expression donnée qui peut s'évaluer (donc réduire) à quelque chose d'autre.

Considérez la fonction `mult`

```
mult :: (Int, Int) => Int
mult (x,y) = x * y
```

et l'expression

```
mult (1+2,2+3)
```

Cette expression possède 3 redexes :

```
mult (1+2,2+3) -> 1+2 * 2+3
mult (1+2,2+3) -> mult (3,2+3)
mult (1+2,2+3) -> mult (1+2,5)
```

## Évaluation par l'intérieur (innermost evaluation)

1. On évalue un redex qui ne contient pas d'autres redexes.
2. Si plusieurs redexes ont cette même propriété,  
on réduit alors le redex le plus à gauche.

Par exemple :

```
mult (1+2, 2+3)
-> mult (3, 2+3)
-> mult (3, 5)
-> 3 * 5
-> 15
```

Remarque :

- Cette stratégie d'évaluation assure que les arguments des fonctions sont évalués avant la fonction même, c'est-à-dire ils sont *passés par valeur*.

## *Evaluation par l'exterieur (outermost evaluation)*

1. On évalue un redex qui n'est pas contenu dans d'autres redexes.
2. Si plusieurs redexes ont cette même propriété, on réduit alors le redex le plus à gauche.

Donc :

```
mult (1+2, 2+3)
-> 1+2 * 2+3
-> 3 * 2+3
-> 3 * 5
-> 15
```

# $\beta$ -réduction

Par l'exemple :

```
(\x -> \y -> x + y) 5 6  
-> (\y -> 5 + y) 6  
-> 5 + 6  
-> 11
```

La règle générale :

$$(\backslash x \rightarrow e) \text{ arg} \rightarrow e[\text{arg}/x]$$

*On évalue l'expression*

*fonction  $\backslash x \rightarrow e$  appliquée à l'argument  $\text{arg}$*

*en substituant la variable  $x$  par  $\text{arg}$  dans le corp de la fonction, l'expression  $e$ .*

## Les $\lambda$ -expressions sont des valeurs

- En Haskell (et dans tous les autres langages fonctionnels qui se fondent sur le  $\lambda$ -calcul), on ne réduit pas sous une  $\lambda$ -expression.
- Les  $\lambda$ -expressions sont donc traitées comme des valeurs.
- Rationale : les fonctions sont des boîtes noires qu'on ne peut pas simplifier.

Ainsi

```
(\x -> 1 + 2) 0  
  -> 1 + 2  
  -> 3
```

est à la fois une évaluation par l'extérieur et par l'intérieur.

# Call-by-value et call-by-name

- stratégie « *call-by-value* » (appel par valeur) :  
évaluation par l'intérieur,  
+  $\lambda$ -expressions pas évaluées,
- stratégie « *call-by-name* » (appel par nom) :  
évaluation par l'extérieur,  
+  $\lambda$ -expressions pas évaluées.

# Plan

Introduction

Les stratégies d'évaluation

Comparaison des stratégies

Terminaison

Nombre de réductions et complexité

L'évaluation, dans la pratique

Structures infinies

Programmation modulaire

foldr et foldl

# Terminaison

Expérimentons avec ce script :

```
omega :: Int
omega = omega +1

expr1 = omega
expr2 = fst (0,omega)
```

Haskell utilise la stratégie call-by-name,  
l'évaluation de `expr2` ne pose pas des problèmes :

```
Prelude> :load "omega.hs"
[1 of 1] Compiling Main
Ok, modules loaded: Main.
*Main> expr1
C-c C-cInterrupted.
*Main> expr2
0
*Main>
```



En fait, en réduisant par l'extérieur, on a :

```
expr2  
  -> fst (0, omega)  
  -> 0
```

On ne demande pas d'évaluer omega.

# Nombre de réductions et complexité

Considérez la fonction suivante :

```
square :: Int -> Int
square n = n * n
```

Evaluation par l'intérieur :

```
square (1+2)
-> square 3
-> 3*3
-> 9
```

Evaluation par l'extérieur :

```
square (1+2)
-> (1+2)*(1+2)
-> 3*(1+2)
-> 3 * 3
-> 9
```

Le sur-coût dû à la duplication des expressions est résolu, en Haskell, via le partage des sous-expressions.

Par exemple :

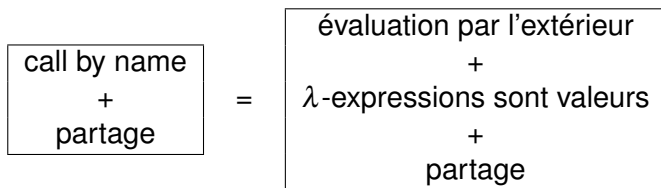
```
square (1+2)
  -> x*x           où x = 1+2
```

on évalue x, en un seul coup

```
-> 3 * 3
-> 9
```

# Évaluation paresseuse

En anglais, « *lazy evaluation* » :



Remarque :

- On suggère de traduire « *lazy* » par “retardée”, au lieu que par “paresseuse”.

# Plan

Introduction

Les stratégies d'évaluation

Comparaison des stratégies

Terminaison

Nombre de réductions et complexité

L'évaluation, dans la pratique

Structures infinies

Programmation modulaire

foldr et foldl

# Structures infinies

En Haskell, on manipule des expressions.

Le programme suivant ne pose donc pas de problèmes :

```
-- La liste infinie,  
-- qui contient seulement des 1  
ones :: [Int]  
ones = 1:ones  
  
two_ones = take 2 ones
```

En fait, on a :

```
two_ones  
-> take 2 ones  
-> take 2 (1:ones)  
-> 1:take 1 ones  
-> 1:take 1 (1:ones)  
-> 1:1:take 0 ones  
-> 1:1:[] = [1,1]
```

# Le crible d'Eratosthène

- $l_0$  : la liste de tous les entiers  $\geq 2$ ,
- $l_{n+1}$  est obtenu de  $l_n$   
en lui enlevant la tête de  $l_n$  et ses multiples,
- les nombres premiers : les têtes des  $l_n$ .

2	3	4	5	6	7	8	9	...
	3		5		7		9	...
			5		7			...

Nous pouvons programmer le crible comme suit :

```
import Prelude hiding (iterate)

crible :: [Int] -> [Int]
crible (p:xs) = [x | x <- xs, x `mod` p /= 0 ]

iterate :: (a -> a) -> a -> [a]
iterate f x = x:iterate f (f x)

premiers :: [Int]
premiers = let
  yss = iterate crible [2..]
in
  map head yss

premiers_10_premiers = take 10 premiers
```



# Programmation modulaire

L'exemple précédent montre aussi comme l'évaluation paresseuse peut venir en aide à la modularité des programmes.

En fait, le problème d'engendrer tous les nombres premiers :

```
premiers = ...
```

est complètement séparé du problème d'en prendre un nombre fini :

```
take 10 premiers
```

## *Un autre exemple I*

Comparez le programme suivant :

```
import System.IO
import Data.Char(toUpper)

main :: IO ()
main = do
    in_handle <- openFile "input.txt" ReadMode
    out_handle <- openFile "output.txt" WriteMode
    mainloop in_handle out_handle
    hClose in_handle
    hClose out_handle
```

## *Un autre exemple II*

```
mainloop :: Handle -> Handle -> IO ()
mainloop inh outh = do
    ineof <- hIsEOF inh
    if ineof then
        return ()
    else
        do
            inpStr <- hGetLine inh
            hPutStrLn outh (processData inpStr)
            mainloop inh outh

processData :: String -> String
processData inpStr = map toUpper inpStr
```

## Un autre exemple III

à cet autre :

```
import Data.Char(toUpper)

main :: IO ()
main = do
    inpStr <- readFile "input.txt"
    writeFile "output.txt" (processData inpStr)

processData :: String -> String
processData inpStr = map toUpper inpStr
```

## *foldr et foldl*

Rappelons d'abord les définitions de ces fonctions :

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
foldr f v [] = v
```

```
foldr f v (x:xs) = f x (foldr f v xs)
```

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
```

```
foldl f v [] = v
```

```
foldl f v (x:xs) = foldl f (f v x) xs
```

## Des tests : *foldr*

```
foldr (&&) True (map odd [1..30])
= foldr (&&) True (map odd 1:[2..30])
= foldr (&&) True (odd 1:map odd [2..30])
= odd 1 && (foldr (&&) True (map odd [2..30]))
= True && (foldr (&&) True (map odd [2..30]))
= foldr (&&) True (map odd [2..30])
= ...
= False && (foldr (&&) True (map odd [3..30]))
= False
```

*L'évaluation paresseuse de l'expression*

*`foldr (&&) True (map odd [1..30])`*

*ne produit pas une liste de valeurs Booléens alternés, de longueur 30.*

*...avec foldl*

```
foldl (&&) True (map odd [1..30])
= foldl (&&) True (map odd 1:[2..30])
= foldl (&&) True ((odd 1):map odd [2..30])
= foldl (&&) (True && odd 1) (map odd [2..30])
= ...
= foldl (&&) ((True && odd 1) && odd 2) (map odd [3..30])
= ...
= foldl (&&) (...((True && odd 1) && odd 2)... odd 30) []
= (...((True && odd 1) && odd 2) = ... = False
```

*Avec foldl et l'évaluation paresseuse, on produit  
une expression intermédiaire importante à évaluer :*

*(...((True && odd 1) && odd 2)... odd 30)*

## *Avec l'interprète*

```
Prelude> foldl (&&) True (map odd [1..1000000000])  
^C^CInterrupted.
```

```
Prelude> foldr (&&) True (map odd [1..1000000000])  
False
```

```
Prelude>
```



## Conclusions

- `foldr` est en général meilleure que `foldl` ;
- `foldl` est en général meilleure que `foldr`, si l'évaluation est stricte (appel par nom) ;
- si la fonction binaire n'est pas associative, on peut être obligés d'utiliser `foldl`, et non pas `foldr`.

Par exemple :

```
implique :: Bool -> Bool -> Bool
implique False _ = True
implique _ True = True
implique True False = False
```

```
*Main> foldl implique True (map odd [1..100])
False
```

```
*Main> foldr implique True (map odd [1..100])
True
```

```
*Main>
```