

Programmation Fonctionnelle

Fonctions d'ordre supérieur

Luigi Santocanale
LIF, Aix-Marseille Université
Marseille, FRANCE

28 septembre 2017

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

Introduction I

Une fonction est dite *d'ordre supérieur* si elle prend (au moins) une fonction parmi ses arguments.

```
twice :: (a -> a) -> a -> a
twice f x = f (f x)
```

twice est une fonction d'ordre supérieur car elle prend une fonction comme son premier argument.

Pourquoi ces fonctions ?

- Les langages spécifiques à un domaine peuvent se définir comme des collections de fonctions d'ordre supérieur.
- Les idiomes communs des langages peuvent s'encorder comme des fonctions dans le langage même.
- Les propriétés algébriques des fonctions d'ordre supérieur peuvent s'utiliser pour raisonner sur les programmes.

Langages spécifiques ??? ... un exemple

```
type Token = Int
type Lexer = String -> (Token,String)

lexerUntil :: (Token -> Bool) -> Lexer -> Lexer
lexerUntil hasProperty lex = \stream ->
  let
    (token,rest) = lex stream
  in
    if hasProperty token then (token,rest)
    else
      (lexerUntil hasProperty lex) rest
```

... un exemple, suite

```
spaceToZero :: Lexer
spaceToZero = \(x:xs) -> if isSpace x then (0,xs)
                        else (ord x,xs)

lexerSkipZeros :: Lexer -> Lexer
lexerSkipZeros = lexerUntil (/=0)

*Main> lexerSkipZeros spaceToZero "      abcd"
(97,"bcd")
```

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

La fonction *map*

La fonction d'ordre supérieur appelée **map** applique une fonction à tous les éléments d'une liste :

$$\text{map} :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b]$$

Par exemple :

```
> map (+1) [1,3,5,7]  
[2,4,6,8]
```

Définition de *map* I

Cette fonction peut se définir en utilisant la compréhension :

```
map f xs = [f x | x <- xs]
```

Sinon – et de façon plus utiles pour faire des preuves – `map` peut se définir par récursion :

```
map f [] = []  
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

La fonction *filter*

Cette fonction sélectionne (filtre) tous les éléments d'une liste satisfaisants un prédicat.

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

Par exemple :

```
> filter even [1..10]  
[2,4,6,8,10]
```

Définition de *filter* /

Définition de `filter` par compréhension :

```
filter p xs = [x | x <- xs, p x]
```

...ou par récursion :

```
filter p [] = []  
filter p (x:xs)  
  | p x = x:filter p xs  
  | otherwise = filter p xs
```

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

La fonction *foldr*

Des nombreuses fonctions sur les listes peuvent se définir avec le même **schéma de récursion** :

```
f [] = v  
f (x:xs) = x @ f xs
```

*f mappe la liste vide vers un valeur v,
et toute autre liste vers le résultat d'appliquer
l'opérateur binaire @ à la tête et à f de la queue.*

Par exemple :

```
sum [] = 0  
sum (x:xs) = x + sum xs
```

v=0 et @=+

```
product [] = 1  
product (x:xs) = x * product xs
```

*v=1 et @=**

```
and [] = True  
and (x:xs) = x && and xs
```

v=True et @=&&

La fonction d'ordre supérieur `foldr` (« *fold right* ») capture ce simple schéma de recursion, avec la fonction @ et l'argument v comme arguments.

Par exemple :

```
sum = foldr (+) 0
product = foldr (*) 1
or = foldr (||) False
and = foldr (&&) True
```


La fonction `foldr` peut elle même se définir par récursion :

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f v [] = v
foldr f v (x:xs) = f x (foldr f v xs)
```

Par ailleurs, c'est utile de penser à cette fonction de façon non récursive, comme le résultat de l'évaluation de l'expression obtenue de la liste en remplaçant chaque symbole :
(l'opérateur *cons* des listes) par l'opérateur binaire @ passé en argument, et [] par la valeur *v*.

Par exemple :

```
sum [1,2,3] = foldr (+) 0 [1,2,3]
            = foldr (+) 0 (1:(2:(3:[])))
            = (1+(2+(3+0)))
            = 6
```

Remplace tout (:) par (+) et [] par 0.

Par exemple :

```
product [1,2,3] = foldr (*) 1 [1,2,3]
              = foldr (*) 1 (1:(2:(3:[])))
              = 1*(2*(3*1))
              = 6
```

Remplace tout (:) par () et [] par 1.*

Autres exemples avec `foldr`

Même si `foldr` code un simple schéma de récursion, il peut être utilisé pour définir beaucoup plus de fonctions de ce qu'on pourrait s'imaginer.

length de foldr

Rappelez vous la fonction `length` :

```
length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

Par exemple :

```
length [1,2,3] = length (1:(2:(3:[])))
                = 1+(1+(1+0))
                = 3
```

*Remplace tout `(:)` par `(_ n -> 1+n)`
et `[]` par `0`.*

Par conséquence, on a

```
length = foldr (\_ n -> 1+n) 0
```

reverse depuis foldr

```
reverse [] = []  
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

Par exemple :

```
reverse [1,2,3]  
= reverse (1:(2:(3:[])))  
= 1 r (2 r (3 r []))  
= (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]  
= [3,2,1]
```

Remplacer tout (:) par r et [] par [], où
 $(r) = \backslash x \ xs \rightarrow xs \ ++ \ [x]$

Donc :

```
reverse = foldr (\x xs -> xs ++ [x]) []
```

(++) de foldr

Pour finir, la fonction `(++)` (concatenation binaire) peut se définir de façon très compacte en utilisant `foldr`.

Exemple :

```
[1,2,3] ++ [4,5,6]
= 1:2:3:[] ++ [4,5,6]
= 1:2:3:[4,5,6]
```

Remplacer tout `(:)` par `(:)` et `[]` par `ys`.

Donc :

```
(++ ys) = foldr (:) ys
```

Pourquoi utiliser `foldr` ?

- La définition de certaines fonctions récursives sur les listes – comme `sum` – est plus simple en utilisant `foldr`.
- Propriétés algébriques des fonctions ainsi définies peuvent se prouver en utilisant les propriétés algébriques de `foldr`.

Voir par exemple :

<http://www.randomhacks.net/articles/2007/02/10/map-fusion-and-haskell-performance>

- On peut obtenir des programmes optimisés si on utilise `foldr` à la place de la récursion explicite.

Remarque

Une autre fonction similaire à foldr est :

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f z [] = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

```
*Main> let xs = [True,False]
*Main> let x ==> y = not x || y
*Main> foldl (==>) True xs
False
*Main> foldr (==>) True xs
True
```

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

D'autres fonctions d'ordre supérieur de Prelude

La fonction `(.)` retourne la composition de deux fonctions :

$$\begin{aligned} (.) &:: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) \\ f . g &= \backslash x \rightarrow f (g\ x) \end{aligned}$$

Par exemple :

```
odd :: Int -> Bool
odd = not . even
```

all

La fonction `all` décide si tout élément d'une liste satisfait un prédicat.

```
all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
all p xs = and [p x | x <- xs]
```

Par exemple :

```
> all even [2,4,6,8,10]
True
```

La fonction `any` décide si au moins un élément d'une liste satisfait un prédicat.

```
any :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
any p xs = or [p x | x <- xs]
```

Par exemple :

```
> any isSpace "abc def"
True
```

takeWhile

La fonction `takeWhile` sélectionne les éléments d'une liste, tant que un prédicat est vrai de ses éléments :

```
takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile p [] = []
takeWhile p (x:xs)
  | p x          = x:takeWhile p xs
  | otherwise    = []
```

Par exemple :

```
> takeWhile isAlpha "abc def"
"abc"
```

dropWhile

La fonction `dropWhile` enlève les éléments d'une liste, tant que un prédicat est vraie de ces éléments.

```
dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
dropWhile p [] = []
dropWhile p (x:xs)
  | p x = dropWhile p xs
  | otherwise = x:xs
```

Par exemple :

```
> dropWhile isSpace "   abc"
"abc"
```

Plan

Fonctions d'ordre supérieur: introduction

Fonctions d'ordre supérieur: exemples

Schémas de récursion : `foldr`

D'autres fonctions d'ordre supérieur

Exercices

Exercices

1. Si une fonction retourne une autre fonction comme résultat, on dit que cette fonction est ... ?
2. Utilisez les fonctions `map` et `filter` pour donner un équivalent de l'expression `[f x | x <- xs, p x]`
3. Redéfinissez `map f` et `filter p` à l'aide de `foldr`.
4. Proposez une définition de la fonction `foldl`.