# TD n° 8

# Unification et résolution

## UNIFICATION

**Exercice 8.1.** Appliquez l'algorithme d'unification présenté en cours pour résoudre les problèmes d'unification suivants :

1. $(x+s(y)*s(z), 7+s(5)*s(s(x)))$ ;
2. $(x+f(y,5), g(x)+f(g(x),5))$ ;
3. $(f(z,f(y,c)), f(g(w),x))$ ;
4. $(f(x),y)$ , $(g(y),z)$ , $(y,f(w))$ ;
5. $(g(x),g(f(y)))$ , $(z,h(y,x))$ , $(y,z)$ ;
6. $(f(x),f(g(y)))$ , $(x,h(y))$ .

Pour chaque instance du problème :
- on décrira d'abord la signature fonctionnelle : lesquels sont les symboles de fonctions et avec quelle arité ils sont utilisés ;
- on éclaircira, étape par étape, le déroulement de l'algorithme.

**Exercice 8.2.** Argumentez que, si $x \notin Var(t)$, alors la substitution $[t/x]$ est un MGU du problème $(x,t)$.

## RÉSOLUTION

**Exercice 8.3.** Appliquez la règle de factorisation, de toute facon possible, aux clauses suivantes :

1. $\neg Q(g(y),x) \vee P(f(x),y) \vee P(y,f(x))$ ;
2. $\neg Q(x,y) \vee P(f(x),y) \vee P(x,g(z)) \vee P(f(w),y)$ .

**Exercice 8.4.** Appliquez la règle de résolution, de toute façon possible, aux couples de clauses suivantes :

1. $\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee R(y)$ , $\neg P(y) \vee Q(y,g(y))$ ;
2. $\neg P(x) \vee Q(f(x))$ , $\neg Q(y) \vee P(g(y))$ .

**Exercice 8.5.** Considérez la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Phi := \quad & \forall x \neg R(x,x) \\ & \wedge \quad \exists x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \exists z R(z,x)) \\ & \quad \wedge \quad \forall x,y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x))) \, . \end{aligned}$$

1. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de cette formule.
2. Enumérez toutes les règles du calcul de la résolution que vous pouvez appliquer à l'ensemble de clauses ainsi obtenu.
3. Appliquez ces règles pour engendrer des nouvelles clauses.

**Exercice 8.6.** Prouvez par résolution que les ensembles de clauses suivants sont inconsistants

1. $\{p(x), \neg p(x) \vee \neg q(x), q(x) \vee \neg r(y), r(x) \vee s(a), r(b) \vee \neg s(x)\}$
2. $\{s(b,b,a), s(b,b,b), r(w,a), r(a,z), \neg q(b), q(x') \vee \neg p(x',z') \vee \neg p(x',w') \vee \neg r(z',w'), p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)\}$

**Exercice 8.7.** Prouvez par résolution la validité de la formule suivante.

$$\exists x \exists y ((p(f(x)) \wedge q(f(b))) \Rightarrow (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$$

**Exercice 8.8.** Considérez l'ensemble de clauses suivantes :

$$\Gamma = \{ \quad P(c_0), \quad \forall x (\neg P(x) \vee x = c_1), \quad c_1 = c_2 \ \}$$

(a) Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $c_0 = c_2$ n'est pas (contrairement aux attentes) une conséquence logique de $\Gamma$.

(b) Pour quelle raison le calcul de la résolution n'est pas capable d'inférer $c_0 = c_2$ depuis $\Gamma$ ?

(c) Étant donné votre réponse à (b), expliquez comment on peut se servir de la résolution pour montrer que $c_0 = c_2$ est une conséquence logique de $\Gamma$.

**Exercice 8.9.** (Une forme simplifiée des) Les règles de paramodulation et flip sont les suivantes :

$$\frac{C \vee t_1 = t_2 \qquad P(t_3)}{(C \vee P(t_2))\sigma} \qquad\qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$$

où $\sigma$ est un MGU de $t_1$ et $t_3$.

— Montrez qu'on peut simuler ces règles avec un suite d'inférences du calcul de la résolution si on dispose, parmi les clauses initiales, de formules établissant que l'égalité est réflexive, symétrique, transitive et congruentielle pour $P$. Cette dernière condition signifie que si $x = y$ et $P(x)$ alors $P(y)$.

— Montrez par ailleurs que si vous ajoutez de la règle de paramodulation et la règle flip au calcul de la résolution, alors les propriétés de l'égalité (réflexivité, symétricité, transitivité, congruentialité) sont conséquences logiques de l'ensemble vide d'assomptions.