# TD n° 7

# Premier-Ordre - Formes normales

## FORMES NORMALES

**Exercice 7.1.** *(Forme prénexe).* Donner une forme prénexe des formules suivantes, en précisant les étapes de calcul :

1. $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x \forall y(\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow \exists y(\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))$

**Exercice 7.2.** *(Skolémisation).* Mettre en forme prénexe puis skolémiser les formules :

1. $\neg(\neg\varphi(x) \vee \forall x \psi(x)) \wedge (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \tau(x))$
2. $(\exists x \forall y(\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y(\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x)))$

**Exercice 7.3.** *(Formes prenexes et clausales).*

1. Donnez une forme prénexe et ensuite une forme clausale de la formule suivante, en précisant les étapes de calcul :

$$(\exists x \forall y(\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y(\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))).$$

2. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de la formule :

$$\forall x \neg R(x,x) \ \wedge\ \exists x \forall y(R(x,y) \Rightarrow \neg\exists z R(z,x)) \ \wedge\ \forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(z,x))).$$

## MODÈLES ET PLUS

**Exercice 7.4.** Considérez la formule suivante :

$$\varphi_1 := \forall x((\forall y(R(y,x) \Rightarrow Q(f(x),y)) \Rightarrow Q(f(x),x)).$$

1. Proposez un modèle $\mathscr{M}$ de $\varphi_1$ tel que $D_{\mathscr{M}} = \{0,1,2\}$.
2. Calculez une forme de Skolem $\varphi_2$ de $\varphi_1$.
3. Proposez un modèle de $\varphi_2$.

**Exercice 7.5.** Considérez la formule $\varphi$ suivante :

$$\exists x \forall y \neg(f(y) = x) \ \wedge\ \forall x\, g(f(x)) = x.$$

1. Donnez un modèle de cette formule.
2. Argumentez que si $\mathscr{M}$ est un modèle de $\varphi$, alors $D_{\mathscr{M}}$ est un ensemble infini.

**Exercice 7.6.**

1. Proposez une autre formule de la logique du premier ordre telle que tout modèle de cette formule est infini. (Idée : pensez à des ensembles ordonnées tels que $\mathbb{Q}$).
2. Proposez une autre formule dont tous les modèles sont finis.

**Exercice 7.7** (Modélisation de l'article "un"). Formalisez en logique du premier ordre les formules suivantes : (choisir le langage de façon à ce que chaque "un" soit modélisé par une quantification)

1. Jean suit un cours.
2. Un logicien a été champion du monde de cyclisme.
3. Un entier naturel est pair ou impair.
4. Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.

**Exercice 7.8.** Soit le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2)\}$. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation $r$ est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat $r$ contient le produit cartésien de $p$ et $q$ ;
3. le prédicat $r$ est égal au produit cartésien de $q$ et $p$ ;
4. La fonction $f$ est surjective ;
5. La fonction $g$ est injective.

**Exercice 7.9.** Après avoir choisi le langage, modélisez en logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. La relation $\sqsubseteq$ est un ordre partiel (elle est réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. $x$ est un minorant (une borne inférieure) de $y$ et $z$ ;
3. $x$ est la borne inf (la plus grande borne inférieure) de $y$ et $z$ ;
4. $x$ est borne inf (la plus grande borne inférieure) de l'ensemble $S$ ;
5. $S$ n'a pas une borne inf ;
6. $S$ est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

Pour terminer, trouvez un modèle de la formule modélisant 5. Est il possible de trouver un modèle fini de cette formule ?

**Exercice 7.10.** En utilisant un langage que vous préciserez clairement, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les chiens aiment leurs maîtres.
2. Certains chats haïssent leurs propriétaires.
3. Les chats sont les maîtres de leurs propriétaires.
4. Les chiens ne haïssent que les chats qui ne les aiment pas.
5. Il n'y a que des chats qui mangent leur moustaches.

Au cas que plusieurs formalisations vous semblent raisonnables, justifiez-les en utilisant les équivalences de la logique du premier ordre.