TD n° 6

Premier-Ordre - Sémantique

SÉMANTIQUE

Exercice 6.1. On donne $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(a,0)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,2)\}$ et les formules :

$\varphi_1 = \; p(a, f(f(a)))$

$\varphi_2 = \; \forall x\,(p(x,x) \Rightarrow \exists y p(x,y))$

$\varphi_3 = \; \forall x\,(\,\exists y(p(x,y) \wedge p(y,a)) \Rightarrow \neg p(x,a)\,)$

1. En supposant que le domaine d'interprétation D est l'ensemble des êtres humains, que a est interprétée par *Adèle*, $f(x)$ est *le père de x*, que $p(x,y)$ signifie *x aime y*, interprétez (en langue française) les trois formules.
2. On considère maintenant la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M} = \langle D, p^{\mathscr{M}}, a^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}} \rangle$, où :
   — $D = \{\text{Alma}, \text{Max}, \text{Dan}\}$
   — $p^{\mathscr{M}} = \{(Alma,Alma),(Alma,Dan),(Max,Alma),(Max,Dan)\}$
   — $a^{\mathscr{M}} = \text{Alma}$
   — $f^{\mathscr{M}}$: $\text{Alma} \mapsto \text{Max}, \text{Max} \mapsto \text{Dan}, \text{Dan} \mapsto \text{Dan}$,
   Les formules φ_1, φ_2, φ_3 sont-elles vraies dans cette structure (ou, autrement dit, interprétation) ?

Exercice 6.2. Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire et un symbole de fonction f unaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \{a,b,c,d\}, \qquad R^{\mathscr{M}} = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\},$$
$$f^{\mathscr{M}}(a) = c, \qquad f^{\mathscr{M}}(c) = a, \qquad f^{\mathscr{M}}(b) = d, \qquad f^{\mathscr{M}}(d) = b.$$

1. Représentez la structure $\mathscr{M}$ sous la forme de graphe étiqueté (des arcs étiquetés par R et des arcs étiquetés par f).
2. En regardant le (dessin du) graphe, évaluez les formules suivantes (utilisez votre intuition) :
   $\varphi_1 \equiv \; \forall x \exists y(\,R(x,y) \wedge R(f(y),x)\,)$
   $\varphi_2 \equiv \; \exists x \forall y(\,R(x,y) \vee R(f(y),x)\,)$
   $\varphi_3 \equiv \; \forall x \exists y(\,R(x,y) \Rightarrow \exists z R(f(z),x)\,)$
3. Évaluez ces formules dans $\mathscr{M}$, en utilisant maintenant la définition formelle de l'évaluation : appliquez, une par une, toutes les étapes.

Exercice 6.3. A l'aide d'un raisonnement sémantique déterminer si les formules suivantes sont des tautologies :

$\psi_1 \equiv \; \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

$\psi_2 \equiv \; \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

$\psi_3 \equiv \; \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

Exercice 6.4. Soit $\mathscr{S}$ un langage contenant le symbole de relation unaire P. Montrez que

$$\mathscr{M} \models \forall x P(x) \text{ implique } \mathscr{M}, \mathscr{V} \models P(t), \text{ pour tout terme } t \text{ et valuation } \mathscr{V}.$$

Exercice 6.5. Supposons que x ne soit pas liée dans φ, et que y n'a aucune occurrence dans φ. Soit $\varphi[y/x]$ la formule obtenue de φ en remplaçant toute occurrence de x par y. Demontrez que

$$\mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall x \varphi \quad \text{si et seulement si} \quad \mathscr{M}, \mathscr{V} \models \forall y \varphi[y/x] \ ,$$

pour toute structure $\mathscr{M}$ et valuation $\mathscr{V}$.

Exercice 6.6. Soit $\mathscr{S}$ la signature constituée d'un symbole de constante 0, d'un symbole de fonction unaire s, et d'un symbole de relation binaire $\geq$ que l'on notera de manière infixe. On considère la formule :

$$\varphi : \forall x(x \geq 0) \wedge \forall x(x \geq x) \wedge \forall x, y(x \geq y \Rightarrow s(x) \geq s(y)).$$

1. La $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathscr{M}}, \geq^{\mathscr{M}}, s^{\mathscr{M}} \rangle$ où $0^{\mathscr{M}} = 0$, $\geq^{\mathscr{M}}$ est l'ordre naturel sur les entiers et $s^{\mathscr{M}}$ est le successeur associé, est-elle un modèle de φ ?
2. Quels sont tous les modèles de cette formule, si on ne modifie que l'interprétation de $\geq$?

I ORDRE : FRANÇAIS ET ARGOT MATHÉMATIQUE

Exercice 6.7. Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve au PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve au PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est éloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 6.8. Soit le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2)\}$. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat r contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat r est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.

Exercice 6.9. Soit le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_r)$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(\sqsubseteq, 2)\}$ (vous pouvez écrire $\sqsubseteq (x,y)$ en notation infixe : $x \sqsubseteq y$). Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une borne inférieure de y et z ;
3. x est la plus grande borne inférieure de y et z ;
4. x est plus grande borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.