

TD n° 5**Syntaxe de la logique du premier-ordre, formalisation, DPLL**

PREMIER ORDRE, SYNTAXE

Exercice 5.1. Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_r)$ où

$$\mathcal{S}_f = \{ (c, 0), (f, 1), (g, 2) \},$$

$$\mathcal{S}_r = \{ (P, 1), (Q, 2), (R, 3) \}$$

et les expressions suivantes :

1. $g(f(c), g(x, f(f(y))))$,
2. $g(f(c), f(c, f(c)))$,
3. $Q(f(x), P(y))$,
4. $R(f(c), f(f(c)), y)$,
5. $P(f(x)) \wedge \exists y(Q(y, x) \Rightarrow R(y, x, f(x)))$,
6. $P(f(x)) \vee R(g(x, y), f(z), y)$,
7. $\forall x \exists y g(x, f(y))$,
8. $\exists y \forall x Q(g(x), f(y, g(c)))$,
9. $\forall x \exists y \forall z Q(x, f(y), g(c, z)) \vee P(x)$.

Classez chaque expression dans une ou plusieurs des catégories suivantes : (a) terme appartenant à $T_{\mathcal{S}_f}[X]$, (b) formule atomique parmi les formules de $\mathcal{F}_{po}(\mathcal{S})$, (c) formule appartenant à $\mathcal{F}_{po}(\mathcal{S})$, (d) aucun des précédents. Dans le dernier cas, expliquez pourquoi l'expression ne peut pas se classer.

Exercice 5.2. Pour chacune des signatures \mathcal{S}_f suivantes, donnez plusieurs éléments de l'ensemble $T_{\mathcal{S}_f}[X]$ des termes définis sur \mathcal{S}_f .

1. $\mathcal{S}_f = \{(s, 1)\}$;
2. $\mathcal{S}_f = \{(f, 2)\}$;
3. $\mathcal{S}_f = \{(f, 2), (s, 1), (c, 0)\}$.

Exercice 5.3. On considère le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_r)$ où $\mathcal{S}_f = \{(c, 0), (f, 1), (g, 2)\}$ et $\mathcal{S}_r = \{(r, 2), (p, 1), (q, 3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 5.4. On considère l'ensemble de variables $X = \{x, y, z\}$ et les formules suivantes :

$$\varphi_1 = (\forall x \exists z f(x, z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x, y, z))$$

$$\varphi_2 = (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x))$$

$$\varphi_3 = \forall x ((\exists x g(f(x), a) \vee h(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y)))$$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. inférez le langage (i.e. le couple des signatures \mathcal{S}_f et \mathcal{S}_r) sur laquelle la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.

Exercice 5.5. Pour chacune des formules suivantes, déterminer les occurrences liées et libres de chaque variable, puis renommer les variables pour obtenir une formule équivalente dont aucune occurrence de variable n'est libre et liée à la fois.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \forall x \exists z r(x, z) \Rightarrow \exists x \forall y s(x, y, z) \\ \varphi_2 &\equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\ \varphi_3 &\equiv \forall x ((\exists x p(f(x), a) \vee q(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y)))\end{aligned}$$

FRANÇAIS ET LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Exercice 5.6. On considère le langage $\mathcal{L} = (\emptyset, \mathcal{S}_r)$ où

$$\mathcal{S}_r = \{(Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1)\}.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Exercice 5.7. En utilisant un langage que vous préciserez clairement, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les chiens aiment leurs maîtres.
2. Certains chats haïssent leurs propriétaires.
3. Les chats sont les maîtres de leurs propriétaires.
4. Les chiens ne haïssent que les chats qui ne les aiment pas.

Exercice 5.8. Considérez les phrases suivantes :

1. Au moins deux personnes ont préparé et réussi l'examen.
2. Tout le monde a reçu des conseils d'Alice ou de Bob.
3. Tous ceux qui ont préparé l'examen et ont reçu des conseils de Bob ont raté l'examen.
4. Quelqu'un a donné des conseils à exactement une personne.
5. Alice a reçu des conseils de quelqu'un ayant reçu des conseils de Bob, et elle a raté l'examen.

Choisissez un langage du premier ordre vous permettant de formaliser ces phrases en logique du premier ordre. Formalisez ces quatre phrases comme des formules de la logique du premier ordre sur le langage choisi.

DPLL, ENCORE

Exercice 5.9. Pour chaque ensemble de clauses suivant, exécutez l'algorithme DPLL, d'abord en utilisant une heuristique de type MOMS, et ensuite en utilisant une heuristique de type DLIS.

1. $\{\neg p_2 \vee p_2 \vee \neg p_5, \neg p_5 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_2, p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \neg p_5, \neg p_2 \vee p_5, \neg p_3 \vee p_5\}$,
2. $\{\neg p_2 \vee p_2 \vee \neg p_4, p_4 \vee \neg p_4, p_4 \vee p_2 \vee \neg p_4\}$,
3. $\{p_3 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_3 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_1, \neg p_3 \vee p_1 \vee p_3\}$,
4. $\{\neg p_4 \vee p_3, p_3 \vee \neg p_3 \vee p_2, \neg p_3 \vee p_2, \neg p_1 \vee p_3 \vee p_4, \neg p_3 \vee p_1 \vee p_3 \vee \neg p_4, p_4 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee p_4, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee \neg p_2, p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2, p_1 \vee p_2, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_1 \vee p_4 \vee \neg p_1\}$,
5. $\{p_2 \vee \neg p_2 \vee \neg p_1, p_1 \vee \neg p_2, p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_1, \neg p_2 \vee p_1 \vee \neg p_1, \neg p_2 \vee \neg p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$.