TD n° 4

Calcul Propositionnel : Résolution propositionnelle, Modélisation

MÉTHODE DE LA COUPURE

Exercice 4.1. Utiliser la méthode de la coupure pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$.
8. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Exercice 4.2. Un ensemble de clauses $\mathscr{S}$ est *saturé* si $\mathscr{S} \vdash_R C$ implique $C \in \mathscr{S}$. On dit qu'un tel ensemble est *cohérent* si $\bot \notin \mathscr{S}$.

1. Donnez un exemple d'un ensemble saturé et cohérent.
2. Donnez un exemple d'un ensemble fini de clauses $\mathscr{C}$ tel que tout ensemble saturé $\mathscr{S}$ avec $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$ est infini.
3. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé, alors il en est de même pour $\mathscr{S}\langle p \leftarrow \bot\rangle$.
4. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé et cohérent, et $\mathscr{S}\langle p \leftarrow \bot\rangle$ n'est pas cohérent, alors $p \in \mathscr{S}$.
5. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé et cohérent, alors au moins un parmi $\mathscr{S}\langle p \leftarrow \bot\rangle$ et $\mathscr{S}\langle p \leftarrow \top\rangle$ est saturé et cohérent.

Exercice 4.3. Une clause C_0 subsume une clause C_1 quand tout littéral de C_0 est aussi un littéral de C_1. On écrit alors $C_0 \sqsubseteq C_1$.

- Montrez $C_0 \sqsubseteq C_1$ implique $C_0 \models C_1$.
- Montrez que, lorsqu'on veut calculer un modèle de $\mathscr{C}$, on peut retirer de $\mathscr{C}$ toute clause C_1 telle qu'il existe une clause $C_0 \in \mathscr{C}$ telle que $C_0 \sqsubseteq C_1$.

Exercice 4.4. Le but de cet exercice est de voir comment on peur transformer le système de règles de la résolution propositionnelle en un algorithme pour la satisfiasabuilité. Une clause est *factorisée* si elle ne contient pas deux occurrences du même littéral.

1. Donnez un exemple de clause factorisée et un exemple de clause qui n'est pas factorisée.
2. Proposez une borne supérieure au nombre de clauses factorisées, quand $\text{PROP} = \{ p_1, \ldots, p_n \}$.
3. Soit $f(C)$ la clause factorisée obtenue de C en éliminant toute double occurrence d'un littéral. Argumentez que $C \vdash_R f(C)$ et que $f(C) \sqsubseteq C$ (c'est-à-dire, $f(C)$ subsume C).
4. Soit $\mathscr{C}$ un ensemble de clauses et posons $\mathscr{C}' := \{ f(C) \mid C \in \mathscr{C} \}$. Montrez que $\mathsf{mod}(\mathscr{C}) = \mathsf{mod}(\mathscr{C}')$.
5. Montrez que les clauses factorisées ne sont pas fermés sous la règle de résolution.

6. Soient C_0, C_1, C_2 trois clauses ; soient aussi F_1 et F_2 deux clauses factorisées telles que $F_1 \sqsubseteq C_1$ et $F_2 \sqsubseteq C_2$. Argumentez que si on peut déduire C_0 de C_1 et C_2 par la règle de résolution, alors ou bien il existe une clause factorisée F_0 telle que $\{ F_1, F_2 \} \vdash_R F_0$ et $F_0 \sqsubseteq C_0$, ou bien $F_i \sqsubseteq C_0$ pour un quelque $i = 1, 2$.
7. Proposez une stratégie (ou méthode) pour choisir quelle règle appliquer, factorisation et ou résolution) permettant de
   — produire la clause vide $\perp$, au cas $\mathscr{C}$ est instatisfaisable ;
   — arreter les inférences si l' ensemble de départ $\mathscr{C}$ est satisfiasable.
   Idée : appliquer la règle de résolution seulement aux clauses factorisées.
8. Argumentez de la correction et de la complètude de cette stratégie.

MODÉLISATION

Exercice 4.5. Le lieutenant Colombo enquête sur le crime commis la nuit du 11 octobre. Il dispose des informations suivantes :

1. Jacques ou Martin est coupable.
2. Si Martin est coupable, alors le crime a eu lieu avant minuit.
3. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Jacques est coupable.
4. Le crime a eu lieu avant minuit.

Que peut-il en déduire sur l'identité du (ou des) coupable(s) ? Même question s'il dispose de l'information supplémentaire :

5. Si Jacques est coupable, alors le crime a eu lieu après minuit.

(Modélisez ces informations en logique propositionnelle et utilisez la méthode de la coupure pour les déductions).