TD n° 2

Calcul Propositionnel - Conséquences logiques

Formalisation et modélisation

Exercice 2.1. Traduire les assertions ci-dessous en associant les variables propositionnelles p, q, r aux énoncés suivants : p : *il pleut*; q : *Pierre prend son parapluie*; r : *Pierre est mouillé*.

1. S'il pleut Pierre prend son parapluie.
2. Si Pierre prend son parapluie, Pierre n'est pas mouillé.
3. S'il ne pleut pas, Pierre ne prend pas son parapluie et Pierre n'est pas mouillé.

Montrer que « Pierre n'est pas mouillé » est une consequence logique des trois énoncés précédents.

Exercice 2.2. On dispose de trois cases alignées, notées $1,2,3$ de gauche à droite, et de pions de formes différentes : triangle, rond ou carré. Les pions peuvent-être placés dans les cases. Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ on note c_i l'assertion : « la case i contient un pion carré », et on fait de même pour les autres formes.

1. Modélisez, avec des formules du calcul propositionnel, les deux assertions suivantes : « il y a un pion rond immédiatement à droite d'un pion carré » et « chaque case contient un (et un seul) pion ».
2. Donnez les modèles de l'ensemble composé par ces deux formules. Que peut-on en déduire quant au pion situé dans la case 2 ?

La conséquence logique

Rappels et notations. Dans la suite de cette planche, Σ et Γ désignent deux ensembles *quelconques* (finis ou non, éventuellement vides) de formules. De même, φ et ψ dénotent deux formules propositionnelles quelconques.

Dans cette planche, on notera aussi :

$$\text{Taut} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \ \mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val} \,\}, \qquad \text{NonSat} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing \,\},$$
$$\text{Cons}(\Sigma) = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \Sigma \models \varphi \,\}.$$

Taut est l'ensemble des tautologies, NonSat est l'ensemble des formules non-satisfaisables, et Cons(Σ) est l'ensemble des conséquences logiques de Σ.

Pour rappel, si A et B sont deux ensembles, alors

— pour prouver que $A \subseteq B$, on montre que "pour tout élément a, si $a \in A$ alors $a \in B$"
— pour prouver que $A = B$ on montre que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$
— $a \in A \cap B$ ssi $a \in A$ et $a \in B$
— $a \in A \cup B$ ssi $a \in A$ ou $a \in B$

Exercice 2.3. On se donne Γ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule φ conséquence de Γ, une formule ψ qui n'est pas une conséquence de Γ.

1. On ajoute une tautologie τ à Γ. Est-ce que φ et ψ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$? Donnez une preuve formelle.
2. Même question si τ est une formule insatisfaisable.

Exercice 2.4. Démontrer :

1. $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.
2. $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi$.
3. $\varphi \equiv \psi$ ssi $\mathrm{Cons}(\varphi) = \mathrm{Cons}(\psi)$.

Exercice 2.5. Démontrer :

1. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$ (vu en cours) ;
2. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\mathrm{Cons}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cons}(\Gamma)$;
3. $\Sigma \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma)$;
4. $\mathsf{mod}(\mathrm{Cons}(\Sigma)) = \mathsf{mod}(\Sigma)$ (partiellement vu en cours) ;
5. $\mathsf{mod}(\Sigma) = \mathsf{mod}(\Gamma)$ ssi $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Cons}(\Gamma)$;
6. $\mathrm{Cons}(\mathrm{Cons}(\Sigma)) = \mathrm{Cons}(\Sigma)$;
7. $\mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\Gamma)$ ssi $\mathrm{Cons}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma)$.

Exercice 2.6. Un ensemble de formules Γ est dit *complet* ssi

$$\Gamma \text{ est consistant } (\mathsf{mod}(\Gamma) \neq \varnothing) \text{ et, pour tout } \varphi \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}, \Gamma \models \varphi \text{ ou } \Gamma \models \neg\varphi$$

1. Montrez que Γ est complet ssi il a un et un seul modèle.
2. Donnez l'exemple d'un ensemble complet et d'un ensemble non complet.
3. Si v est une une valuation, on appelle *théorie* de v, et on note $\mathrm{TH}(v)$, l'ensemble des formules satisfaites par v. Autrement dit, $\mathrm{TH}(v) = \{\varphi \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}} \mid v(\varphi) = 1\}$. Montrez que, pour tout $v \in \mathsf{Val}$, $\mathrm{TH}(v)$ est complet.
4. Montrez que pour toute formule φ, si $\mathrm{TH}(v) \models \varphi$, alors $\varphi \in \mathrm{TH}(v)$.
5. Donnez l'exemple d'un ensemble complet qui n'est pas de la forme $\mathrm{TH}(v)$.

Exercice 2.7. Soit Γ un ensemble complet contenant toutes ses conséquences (pour toute formule φ, si $\Gamma \models \varphi$ alors $\varphi \in \Gamma$). Prouvez que :

1. $\varphi \in \Gamma$ ssi $\neg\varphi \notin \Gamma$,
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$,
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Le théorème de compacité

Exercice 2.8. Considérez l'ensemble

$$\Gamma = \{ p_1, p_1 \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3, p_3 \Rightarrow \neg p_1 \}.$$

1. Dessinez l'arbre de Herbrand jusqu'à la profondeur 3.
2. Listez tous les noeuds d'échec (par rapport à Γ) ayant profondeur au plus 3. Justifiez avec soin pourquoi il s'agit de noeuds d'échec.
3. À partir de l'arbre de Herbrand et de ses noeuds d'échec, argumentez que Γ est insatisfaisable,

Exercice 2.9. On se donne une carte contenant une infinité de pays (cette carte étant dessinée sur le plan cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Chaque pays a un nombre fini de pays voisins. On cherche à colorer cette carte avec quatre couleurs.

1. Expliquez comment on peut modéliser ce problème comme un problème de satisfaisabilité d'un ensemble de formules propositionnelles.
2. Argumentez que ce problème a une solution (utilisez le théorème de compacité).
3. Si on ne suppose pas que chaque pays a un nombre fini de pays voisins, est ce que on a encore une solution à ce problème ?