TD n° 1

Calcul propositionnel — syntaxe et sémantique

SYNTAXE

Exercice 1.1. Chaque expression suivante

1. $p \vee (q \Rightarrow \wedge r)$;
2. $p \neg (q \Rightarrow \neg r)$;
3. $p \wedge q \wedge r$;
4. $p \wedge (q \models p)$;
5. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p) \Rightarrow (\neg q)$.

n'est pas une formule du calcul propositionnel. Expliquez pourquoi.

Exercice 1.2. Considérez les formules du calcul propositionnel suivantes :

$\varphi_1 := \; r \vee (p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg r))$;
$\varphi_2 := \; p \wedge (r \wedge ((\neg q) \Rightarrow \neg p))$;
$\varphi_3 := \; ((q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \;\wedge\; ((\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q))$.

1. Rappelez ce que c'est une sous-formules d'une formules donnée.
2. Définissez, par induction sur les formules, l'ensemble des sous-formules d'une formule du calcul propositionnel.

   Ensuite, pour chaque formule $\varphi_i \in \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
3. dessinez son arbre syntaxique ;
4. énumérez ses sous-formules ;
5. énumérez les symboles propositionnels ayant une occurrence dans φ_i.

SÉMANTIQUE

Exercice 1.3. 1. Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$?

2. Énumérez les modèles de la formule $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
3. Est ce que cette formule est satisfaisable, insatisfaisable, valide ?

Exercice 1.4. On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

1. Soit v une valuation. Déterminer, *si possible*, $v(\varphi)$ et $v(\psi)$ dans chacun des quatre cas suivants :
   (a) on sait que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$;
   (b) on sait que $v(p) = 0$;
   (c) on sait que $v(q) = 1$;
   (d) on ne sait rien sur $v(p)$ et $v(q)$.
2. Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Des tautologies ?
3. Existe t'il une valuation telle que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$? (On dit que l'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est consistant s'il existe une telle valuation).

Exercice 1.5. Une formule φ est dite *contingente* lorsqu'elle est satisfaisable et non une tautologie. Dire si les formules suivantes sont insatisfiables, contingentes, ou encore des tautologies :

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge (\neg r \vee s)$

Exercice 1.6. Soit φ une formule du calcul propositionnel. On dit que φ est contingente, lorsqu'elle est satisfaisable, mais qu'elle n'est pas une tautologie.

1. Que peut-on dire de $\mathsf{mod}(\varphi)$ lorsque φ est contingente ?
2. Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Que pensez-vous des affirmations suivantes :
   (a) si φ est contingente, alors $\neg\varphi$ l'est également ;
   (b) si φ et ψ sont contingentes, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont contingentes ;
   (c) si $\varphi \vee \psi$ est insatisfiable alors φ et ψ sont insatisfiables ;
   (d) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ et ψ sont des tautologies.
   (e) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ est une tautologie, ou ψ est une tautologie.

Exercice 1.7. Montrez qu'une formule φ est une tautologie si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfaisable. On suppose donné un algorithme qui vérifier si une formule est une tautologie ; construire un autre algorithme pour vérifier si une formule est satisfaisable.

Exercice 1.8. Dans cet exercice, on identifie l'ensemble $\{0,1\}$ au corps $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs $\wedge, \vee, \neg$;
2. Exprimer les connecteurs $\wedge, \vee, \neg$ à l'aide des opérations $+$ et $\times$;
3. Montrer qu'à toute formule propositionnelle φ dont les variables sont $q_1, \ldots q_n$, on peut associer un polynôme à n indéterminées $P \in \mathbb{F}_2[a_1, \ldots, a_n]$ tel que $\varphi = P(a_1, ..., a_n)$, et tel que, pour toute valuation v, on a $v(\varphi) = P(v(q_1), \ldots, v(q_n))$.
4. En déduire une méthode pour déterminer si deux formules sont logiquement équivalentes, ou si une formule est une tautologie.
5. Exemplifiez cette méthode avec la loi du tiers exclu $p \vee \neg p$ (montrez que cette formule est une tautologie). Faite de même avec la loi de Pierce.

Exercice 1.9. Prouvez les équivalences logiques suivantes :

$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	(Commutativité)
$\varphi \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \wedge \psi_2$	$\varphi \vee (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \vee \psi_2$	(Associativité)
$\top \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \top \equiv \varphi$	$\bot \vee \varphi \equiv \varphi \vee \bot \equiv \varphi$	(Élements neutres)
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	(Idempotence)
$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$	(Absorption)
$\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi \equiv \bot$	$\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$	(Elément absorbant)
$\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$	$\varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2)$	(Distributivité)
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \neg\varphi \wedge \varphi \equiv \bot$	$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv \top$	(Complément)
$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$		(Involution)
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	(Lois de De Morgan)
$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$		(Implication matérielle)
$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$		(Contraposition)
$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3$		(Curryfication)

(Vous pouvez utiliser la fonction mod pour réduire une équivalence logique à un problème ensembliste, c'est-à-dire démontrer que deux ensembles sont egaux).