Sujet de Master

Ordinaux de clôture du μ-calcul

par Maria Joao Gouveia (Universidade de Lisboa)
et Luigi Santocanale

Contact : luigi.santocanale@lif.univ-mrs.fr

Lieu : LIF, dept. Informatique et Interactions, parc scientifique de Luminy

Continuation en thèse : possible

Contexte. Le μ-calcul propositionnel étend la logique (multimodale) **K** avec des opérateurs de plus petit et de plus grand point-fixe μ and ν. La grammaire pour construire les formules du μ-calcul est la suivante :

$$\phi = p \mid \neg p \mid x \mid \top \mid \phi \wedge \phi \mid [a]\phi \mid \bot \mid \phi \vee \phi \mid \langle a \rangle \phi \mid \mu_x.\phi \mid \nu_x.\phi\,.$$

Étant donnée une formule ϕ du μ-calcul contenant la variable x en position positive, on définit, pour tout modèle $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, la correspondance $\phi_{\mathcal{M}}$ comme suit :

$$\phi_{\mathcal{M}}(X) = [\![\phi]\!]_{\mathcal{M}[X/x]}\,.$$

On se demande à quelle vitesse une telle fonction (qui est en fait croissante, ou monotone) peut converger à son plus petit point-fixe. C'est-à-dire, si on pose

$$\phi_{\mathcal{M}}^{\alpha+1}(\emptyset) = \phi_{\mathcal{M}}(\phi_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\emptyset))\,,$$

$$\phi_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\emptyset) = \bigcup_{\beta<\alpha} \phi_{\mathcal{M}}^{\beta}(\emptyset)\,, \quad \text{quand } \beta \text{ est un ordianl limite,}$$

on dit que $\phi_{\mathcal{M}}$ converge à son plus petit point-fixe en α etapes si $\mu.\phi_{\mathcal{M}} = \phi_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\emptyset)$.

On dit qu'un ordinal α est l'ordinal de clôture de $\phi(x)$ ssi

1. $\mu.\phi_{\mathcal{M}} = \phi_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\emptyset)$, pour tout modèle $\mathcal{M}$. C'est-à-dire, $\phi_{\mathcal{M}}$ converge à son plus petit point fixe toujours en au plus α étapes.
2. Il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que, pour tout $\beta < \alpha$, l'inclusion

$$\phi_{\mathcal{M}}^{\beta}(\emptyset) \subseteq \phi_{\mathcal{M}}^{\beta+1}(\emptyset)$$

   est stricte. Donc, dans ce modèle, $\phi_{\mathcal{M}}$ converge à son plus petit point-fixe en exactement α étapes.

Quels sont les ordinaux de clôture des formules du μ-calcul ? Czarnecki [3] a montré que tout ordinal strictement plus petit que ω^2 est l'ordinal de clôture d'une formule du μ-calcul. Plus tard, Afshari et Leigh [1] ont montré, que si on se restreint aux formules ne contenant pas de plus grand point-fixes, alors les ordinaux plus petit que ω^2 sont les seuls ordinaux de clôture possibles.

Nous avons récemment montré qu'aussi le plus petit ordinal non dénombrable est un ordinal de clôture et que les ordinaux de clôture sont fermés par rapport à l'additioin ordinale (voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_ordinal`). Cette découverte relance la question de caractériser les ordinaux de clôture des formules du μ-calcul.

Travail. L'étudiant se familiarisera d'abord avec la la théorie du μ-calcul [2, par exemple], ainsi qu'avec les travaux pertinents [3, 1].

A la suite, on essayera de comprendre si les outils de [1] peuvent être d'aide pour montrer que les ordinaux construit à partir de 0, 1, ω (le premier ordinal infini) et Ω (le premier ordinal non dénombrable) en utilisant l'opération d'addition sont les seuls ordinaux de clôture de formules du μ-calcul.

Les outils de [1], très fins, reposent sur la notion de tableau. Il s'agit d'une notion très proche à celle de preuve dans un système logique, mais à la fois portant sur une analogie avec la notion d'automate. En fait, l'argumentaire de [1] semble être rien d'autre qu'un lemme de pompage, importé à la logique de la théorie des automates.

Références

[1] B. Afshari and G. E. Leigh. On closure ordinals for the modal mu-calculus. In S. R. D. Rocca, editor, *Computer Science Logic 2013 (CSL 2013), CSL 2013, September 2-5, 2013, Torino, Italy*, volume 23 of *LIPIcs*, pages 30–44. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013.

[2] J. Bradfield and I. Walukiewicz. The mu-calculus and model-checking. In H. V. E. Clarke, T. Henzinger, editor, *Handbook of Model Checking*. Springer-Verlag, 2015.

[3] M. Czarnecki. How fast can the fixpoints in modal μ-calculus be reached ? In L. Santocanale, editor, *7th Workshop on Fixed Points in Computer Science, FICS 2010*, page 89, Brno, Czech Republic, Aug. 2010. Available from `Hal` : `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00512377`.