

Sujet de Master
**Théorie de la correspondance
pour la logique monotone**
par Luigi Santocanale

Contact : `luigi.santocanale@lif.univ-mrs.fr`

Lieu : LIF, dept. Informatique et Interactions, parc scientifique de Luminy

Continuation en thèse : possible

Contexte. La logique (multi)modale monotone diffère de la logique modale usuelle en raison du fait que les opérateurs modaux ne sont pas normaux. C'est-à-dire, les formules de la forme

$$\langle \rangle \perp \rightarrow \perp, \quad \langle \rangle (\phi \vee \psi) \rightarrow \langle \rangle \phi \vee \langle \rangle \psi,$$

ne sont pas de tautologies. Cette logique est “monotone” car les formules

$$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\langle \rangle \phi \rightarrow \langle \rangle \psi)$$

demeurent tautologies.

La logique modale monotone est (la base de) la logique des jeux de Parikh [2]. En fait elle est correcte et complète par rapport à des structures que l'on peut considérer des jeux. Un modèle (de voisinage) consiste en un triplet $\langle S, \sigma, v \rangle$, où S est un ensemble d'états, $v : Prop \rightarrow P(S)$ est une valuation, et $\sigma : S \rightarrow P(P(S))$ est une fonction qui choisit pour chaque état un ensemble d'ensembles de successeurs. On interprète les opérateurs de la logique classique comme d'habitude; pour les opérateurs modaux on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, s \models \langle \rangle \phi &\text{ ssi il existe } C \in \sigma(s) \text{ tel que } \mathcal{M}, c \models \phi, \text{ pour tout } c \in C, \\ \mathcal{M}, s \models [] \phi &\text{ ssi pour tout } C \in \sigma(s), \text{ il existe } c \in C \text{ tel que } \mathcal{M}, c \models \phi. \end{aligned}$$

Intuitivement, on peut penser à une telle structure comme à un jeu joué par Adam et Eva. S est un ensemble de positions; pour chaque position s , Eva a à disposition un certain nombre de coups C_1, \dots, C_n, \dots , $\sigma(s)$ étant donc l'ensemble des ces coups; une fois que Eva a choisi $C \in \sigma(s)$, Adam continue le jeu en choisissant un élément de C . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, s \models \langle \rangle \phi &\text{ ssi Eva a une stratégie pour forcer le jeu} \\ &\text{dans une position satisfaisant } \phi, \\ \mathcal{M}, s \models [] \phi &\text{ ssi Adam a une stratégie pour forcer le jeu} \\ &\text{dans une position satisfaisant } \phi. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette logique et des jeux vient du fait que les systèmes informatiques interactifs ne sont pas contrôlables. C'est-à-dire, chaque étape de calcul est

déterminée à la fois par les choix de la machine, mais aussi par les choix de l'environnement. On préfère donc modéliser des tels systèmes interactifs par des jeux à deux personnes (machine contre environnement), au lieu que par des systèmes de transitions habituels (i.e. par des modèles de la logique modale classique).

Travail. Dans notre travail sur la dualité pour les treillis [3] nous avons constaté un grand nombre de phénomènes de correspondance analogues à ceux bien connus pour la logique modale. On peut en effet considérer la théorie des treillis comme un fragment de la logique monotone ; en vertu de cela, nous avons ensuite [1] essayé d'intégrer ces phénomènes au cadre de la théorie de la correspondance pour la logique modale. Par ailleurs, ce premier essai, à notre avis trop éloigné d'un cadre purement logique, n'a pas permis d'avoir des résultats conclusifs.

Il devient nécessaire de mettre en avant, dans cette recherche, les aspects plus pertinents à la logique. En particulier, il faudra éclaircir les points suivants :

1. Déterminer quelles sont les structures pertinentes ainsi que le cadre logique permettant de développer la théorie.
Par exemple, des structures à deux sortes ont été proposée en [1]. Bien que intéressantes, il reste encore à chercher une axiomatisation de ces structures permettant de développer la théorie.
2. Généraliser les phénomènes observés en [3] pour les treillis à l'ensemble de la logique monotone.
3. Identifier les principes qui permettent de trouver des formules correspondantes. Il s'agit des principes permettant de remplacer la quantification (de deuxième ordre) sur les sous-ensembles avec la quantification (de premier ordre) sur les éléments/singletons. Depuis [1], ces principes sont bien autre chose que ceux connus pour la théorie de Sahlqvist.
4. Poser le mécanisme de recherche de formules correspondantes sur des bases algorithmiques.

Références

- [1] S. Frittella, A. Palmigiano, and L. Santocanale. Dual characterizations for finite lattices via correspondence theory for monotone modal logic. *Journal of Logic and Computation*, 2016. available as <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01054715>.
- [2] R. Parikh. The logic of games and its applications. In M. Karpinski and J. van Leeuwen, editors, *Topics in the Theory of Computation Selected Papers of the International Conference on 'Foundations of Computation Theory', FCT '83*, volume 102 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 111 – 139. North-Holland, 1985.
- [3] L. Santocanale. A duality for finite lattices. Preprint, available as <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00432113>, Nov. 2009.