Collection d'exos relatifs au cours 6

PDL et filtration

Exercice 1. (L'objectif de cet exercice est de montrer que $FL(\phi)$ est un ensemble fini.)
Montrez que, pour une formule de PDL ϕ, la taille de $FL(\phi)$ est majorée par le nombre de symboles de ϕ. (Définissez d'abord formellement ce qu'on veut dire par "le nombre de symboles dans ϕ".)

Exercice 2. Rappelons la méthode de filtration de PDL : étant donnée une formule ϕ et un modèle $\mathcal{M} = \langle S, \{ R_a \mid a \in \Sigma \}, v \rangle$, on construit un nouveau modèle $\mathcal{M}/\sim_\phi = \langle S/\sim_\phi, \{ R_a \mid a \in \Sigma \}, v' \rangle$, où :

— $S/\sim_\phi = \{ \pi_s \mid s \in S \}$, $\pi_s = \{ s' \mid s \sim_\phi s' \}$, et $s \sim_\phi s'$ ssi $\{ \psi \in FL(\phi) \mid \mathcal{M}, s \models \psi \} = \{ \psi \in FL(\phi) \mid \mathcal{M}, s' \models \psi \}$;

— $R'_a = \{ (\pi_s, \pi_t) \mid \exists s' \in \pi_s, t' \in \pi_t, s' R_a t' \}$;

— $v'(p) = \{ \pi_s \mid s \in v(p) \}$.

La propriété importante de cette construction est la suivante :

$$\phi \in FL(\phi) \text{ et, pour toute formule } \psi \in FL(\phi), \text{ tout modèle } \mathcal{M} \text{ et état } s,\ \mathcal{M}, s \models \psi \text{ ssi } \mathcal{M}/\sim_\phi, \pi_s \models \psi. \tag{$*$}$$

Dans cet exercice nous nous attaquons à la preuve du Lemme clé de la méthode de filtration de PDL (sans test) :

Lemme. Pour toute expression régulière $\alpha \in Reg(\Sigma)$,

(i) si $(s, t) \in \|\alpha\|_\mathcal{M}$, alors $(\pi_s, \pi_t) \in \|\alpha\|_{\mathcal{M}/\sim_\phi}$;

(ii) pour tout $s, t \in S$, si $\mathcal{M}, s \models [\alpha]\psi$, $[\alpha]\psi \in FL(\phi)$, et $(\pi_s, \pi_t) \in \|\alpha\|_{\mathcal{M}/\sim_\phi}$, alors $\mathcal{M}, t \models \psi$.

Rappelons que l'on prouve (i) et (ii) par induction sur la structure de l'expression régulière α. Nous avons vu, en cours, la preuve de (ii) dans le cas que $\alpha = \beta^*$ (qui, bien sur, utilise l'hypothèse d'induction "(ii) vaut pour β").

Question 1. Si $f : A \to B$ est un fonction, on a noté $\tilde{f}$ la fonction qui envoie une relation $R \subseteq A \times A$ vers la relation $\tilde{f}(R) = \{ (f(a), f(a') \mid (a, a') \in R \}$. En utilisant les propriétés de $\tilde{f}$ données en cours, donnez une preuve complète de (i).

Question 2. Démontrez (ii) le cas où $\alpha = \beta_0 \cdot \beta_1$. Ne donnez pas, dans votre preuve, d'inférences "risquées" : donnez autant de détails de vos inférences que vous jugez nécessaires. On s'attend à lire ici une preuve "complète" (=sans trous), rédigée parfaitement d'un point de vue logique. Vous pouvez utiliser (sans nécessairement devoir la demontrer) l'équivalence logique entre les formules $[\beta_0 \cdot \beta_1]\psi$ et $[\beta_0][\beta_1]\psi$.

Question 3. Esquissez une preuve complète de (ii).

Question 4. Est ce que la méthode de filtration peut marcher pour le μ-calcul ? C'est-à-dire, est ce qu'on peut trouver, pour toute formule du μ-calcul ϕ, un ensemble fini $FL(\phi)$ de formules du μ-calcul tel que $(*)$ vaut, pour tout modèle $\mathcal{M}$?

μ-calcul

Exercice 3. On rappelle : un automate de Buchi (non-déterministe) sur le mots infini est un tuplet $\mathcal{A} = \langle S, \{ R_a \mid a \in \Sigma \}, i, F \rangle$, avec S un ensemble d'états, $R_a \subseteq S \times S$ une relations binaire pour chaque $a \in \Sigma$, i un état initial, $F \subseteq S$ l'ensemble d'états finaux.
Dans un tel automate, un chemin infini acceptant depuis un état s est une suite $s = s_0 R_{a_0} s_1 R_{a_1} s_2 \ldots s_n R_{a_n} s_{n+1} \ldots$ qui visite l'ensemble F infiniment souvent (un tel chemin accepte le mot infini $a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ si $s_0 = i$.
Argumentez que la formule

$$\phi = \nu_y.\mu_x.[\bigvee_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma \rangle (X \vee (p \wedge y))]$$

est telle que

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}} = \{ s \in S \mid \text{il existe un chemin infini acceptant depuis } s \}$$

si, pour un tel automate $\mathcal{A} = \langle S, \{ R_a \mid a \in \Sigma \}, i, F \rangle$, on pose $\mathcal{M} = \langle S, \{ R_a \mid a \in \Sigma \}, v \rangle$, avec $v(p) = F$.
Conseil : (i) essayez d'abord de comprendre la sémantique de la formule

$$\mu_x.[\bigvee_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma \rangle (X \vee (p \wedge y))]$$

comme fonction f de la variable y, et puis étudiez (ii) ce que veut dire que $s \in T$ pour un sous-ensemble $T \subseteq S$ tel que $T \subseteq f(T)$.

Jeux de parité

Exercice 4. Considérez le triplet $\mathcal{G} = \langle P, R, \lambda, \omega \rangle$ où

1. $P = \{ a, b, c, d, f, g \}$,
2. $R = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, e), (c, a), (c, f), (d, b), (e, g), (f, b), (f, e), (g, d), (g, f) \}$.
3. $\lambda(a) = \lambda(d) = \lambda(e) = Adam, \lambda(b) = \lambda(c) = \lambda(f) = \lambda(g) = Eve$.

On peut transformer ce triplet en jeu de parité $\mathcal{G}_\omega$ si on lui ajoute une fonction (de priorité) $\omega : P \to \mathbb{N}$. Calculez l'ensemble des positions gagnantes pour Eve et celui des positions gagnantes pour Adam dans $\mathcal{G}_\omega$ dans les cas suivants :

1. $\omega(a) = \omega(d) = 2$, $\omega(x) = 1$, sinon ;
2. $\omega(e) = 2$, $\omega(x) = 1$, sinon ;
3. $\omega(a) = 6$, $\omega(b) = 5$, $\omega(c) = 4$, $\omega(d) = 3$, $\omega(e) = 2$, $\omega(f) = 1$, $\omega(g) = 0$.

Justifiez vos réponses. Rappel : une position est gagnante pour un joueur si ce joueur possède une stratégie gagnante dans le jeu depuis cette [position.

Exercice 5. Pour un jeu de parité $\mathcal{G} = \langle P, R, \lambda, \omega \rangle$, le jeu de parité dual est le jeu $\mathcal{G}^d = \langle P, R, \lambda', \omega' \rangle$ avec $\lambda'(p) = Eve$ ssi $\lambda(p) = Adam$, et $\omega'(p) = \omega(p) + 1$.
Pour les trois jeux $\mathcal{G}_\omega$ de l'exercice précédant (un pour chaque définition de ω), calculez l'ensemble de positions gagnantes pour Eve (respectivement, pour Adam) dans le jeu dual $(\mathcal{G}_\omega)^d$. Justifiez votre réponse.