Collection d'exos relatifs au cours 5

Exercice 1. Considérez la formule ϕ de PDL définie par :

$$\phi := [(?\psi_0 \cdot a)^*](\psi_0 \vee \psi_1) .$$

Argumentez que $s \models \phi$ ssi, pour tout a-calcul depuis s, donc de la forme $s = s_0 \xrightarrow{a} s_1, \ldots \xrightarrow{a} s_n \ldots$, de que $s_n \not\models \psi_0$, on a $s_n \models \psi_1$.

Exercice 2. Rappelons qu'une fonction $f : P(A) \to P(A)$ est monotone si $\alpha \subseteq \beta$ implique $f(\alpha) \subseteq f(\beta)$. Une telle fonction est antitone si $\alpha \subseteq \beta$ implique $f(\beta) \subseteq f(\alpha)$.
Soit ϕ une formule de la logique modale. On dit que une occurrence d'une variable p in ϕ est positive si elle se trouve sous un nombre pair de négations. On dit que une occurrence de p in ϕ est négative si elle se trouve sous un nombre impair de négations. On dit que p est positive dans ϕ si toute occurrence de p in ϕ est positive. On dit que p est négative en ϕ si toute occurrence de p in ϕ est négative.
Pour ϕ une formule de la logique modale et $\mathcal{M}$ un modele, soit $\phi_{\mathcal{M}} : P(S) \to P(S)$ définie par

$$\phi_{\mathcal{M}}(X) = \|\phi\|_{\mathcal{M}[X/p]} .$$

Démontrez, l'énoncé suivant : *pour toute formule ϕ de la logique modale et tout modèle $\mathcal{M}$, si p est positive dans ϕ, alors $\phi_{\mathcal{M}}$ est une fonction monotone, et si p est négative in ϕ, alors $\phi_{\mathcal{M}}$ est une fonction antitone.*

Exercice 3. (Point-fixes des fonctions monotones). Démontrez les propriétés suivantes du plus petit point-fixe :

1. $\mu.(f \circ g) = f(\mu.(g \circ f))$, où $f : P(A) \to P(B)$ et $g : P(B) \to P(A)$ sont monotones ;
2. $\nu.f = \neg(\mu.(\neg \circ f \circ \neg))$;
3. $\mu.f = \mu.f^n$.
4. Soit $f : P(A) \times P(B) \to P(A)$ une fonction monotone et, pour tout $\beta \subseteq B$, soit $h_\beta : P(A) \to P(A)$ la fonction qui à $\alpha \subseteq A$ associe $h_\beta(\alpha) = f(\alpha, \beta)$. Montrez que la correspondance qui envoie β vers $\mu.h_\beta$ est monotone.

Exercice 4. Soit $f_1, \ldots, f_n$ une suite de fonctions $f_i : P(A) \to P(A)$ telles que $X \subseteq f_i(X)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. On définit la fonction $\bigvee_{i=1,\ldots,n} f_i : P(A) \to P(A)$ par

$$(\bigvee_{i=1,\ldots,n} f_i)(X) = \bigcup_{i=1,\ldots,n} f_i(X) .$$

Montrez que $\mu.(\bigvee_{i=1,\ldots,n} f_i) = \mu.(f_n \circ \ldots \circ f_1)$.

Exercice 5. Considérez le modèle $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ où
— $S = \{ 0, 1, \ldots, n, \ldots \} \cup \{ \omega \}$,
— $(n + 1, n) \in R$ et $(\omega, n) \in R$, pour tout $n \geq 0$ et $n \neq \omega$,
— $v(p) = \emptyset$ pour tout $p \in Prop$.
Soit, comme d'habitude,

$$g(X) = \{ s \in S \mid \forall s'(sRs' \text{ implique } s' \in X) \} .$$

Pour tout ordinal $\beta \leq \omega + 2$, calculez $g^\beta(\emptyset)$.