Collection d'exos relatifs au cours 4

Exercice 1. Dans cet exercice nous souhaitons étudier l'axiome T :

$$p \to \langle\ \rangle p$$

1. Argumentez que, pour tout frame $\mathbf{F}$, on a
$$\mathbf{F} \models p \to \langle\ \rangle p \text{ ssi } \mathbf{F} \models [\ ]p \to p\,.$$
2. Un frame $\mathbf{F} = (S, R)$ est réflexif si la relation R est réflexive (c'est-à-dire, sRs, pour tout $s \in S$). Montrez que si $\mathbf{F}$ est un frame réflexif, alors $\mathbf{F} \models p \to \langle\ \rangle p$.
3. Montrez que T a la formue $\psi := \forall s(sRs)$ comme formule correspondante au premier order (ce qu'on noté $T \leftrightsquigarrow \psi$). (Pour les absent :) montrez donc que, pour tout frame $\mathbf{F}$,
$$\mathbf{F} \models p \to \langle\ \rangle p \quad \text{ssi} \quad \mathbf{F} \models \forall s(sRs)\,.$$
4. Êtes vous capables de montrer que de $T \leftrightsquigarrow^c \psi$? C'est-à-dire, pour toute algèbre modale A, on a
$$A \models \forall x(x \leq \langle\ \rangle x) \quad \text{ssi} \quad (\mathcal{U}A, R) \models \forall s(sRs)\,,$$
où $\mathcal{U}A$ est l'ensemble des ultrafiltres de A, et $\mathsf{f}R\mathsf{g}$ ssi $[\ ]^{-1}\mathsf{f} \subseteq \mathsf{g}$.
5. Concluez que l'axiomatisation donnée par $\mathbb{K} \cup \{\, T \,\}$ est correcte et complète par rapport à la sémantique de frames réflexifs. C'est-à-dire, on a égalité
$$\mathbf{Thm}(\mathbb{K} \cup \{\, T \,\}) = \mathcal{L}_{Refl},$$
où
$$\mathbf{Thm}(\mathbb{K} \cup \{\, T \,\}) = \{\, \psi \mid \text{on peut dériver } \psi \text{ des axiomes dans } \mathbb{K} \cup \{\, T \,\}, \text{ par les règles } N \text{ et } MP \,\}\,,$$
$$\mathcal{L}_{Refl}, = \{\, \phi \mid \mathbf{F} \models \phi, \text{pour tout frame réflexif } \mathbf{F} \,\}\,.$$

Exercice 2. Rappelons les axiomes D_0 et D_1 :

$$[\ ]p \to \langle\ \rangle p\,, \qquad\qquad \langle\ \rangle p \to [\ ]p\,.$$

Repetez l'exercice 1, mais avec ces axiomes à la place. C'est-à-dire, trouvez des formules de la logicque du premier ordre ψ_i, $i = 0, 1$, et montrez que :

1. si $\mathbf{F} \models \psi_i$ alors $\mathbf{F} \models D_i$, pour tout frame $\mathbf{F}$;
2. que l'on a, en fait, $\mathbf{F} \models \psi_i$ si et seulement si $\mathbf{F} \models D_i$, pour tout frame $\mathbf{F}$ (donc $\phi \leftrightsquigarrow \psi$) ;
3. mieux encore, que $A \models D_i = \top$ si et seulement si $(\mathcal{U}A, R) \models \psi_i$, pour toute algèbre modale frame A (donc $\phi \leftrightsquigarrow^c \psi$).

Exercice 3. Rappel : l'axiome 5 est le suivant :

$$\langle\ \rangle p \to [\ ]\langle\ \rangle p\,.$$

1. Soit $R \subseteq S \times S$ une relation binaire réflexive et transitive. Montrez que R est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique) si et seulement si la condition suivante
$$\forall s, s', s''((sRs' \text{ et } SRs'') \Rightarrow s'Rs'')$$
est satisfaite. (On appelle *Euclidien* un frame dont la relation d'accessibilité satisfait la condition ci-dessus).

2. En utilisant les résultats mentionnés en cours, argumentez que la logique S5 ($=\mathbb{K} \cup \{ T, 4, 5 \}$) est correcte et complète par rapport à la sémantique des frames qui sont des relations d'équivalence.
3. Démontrez $\mathbf{F} \models \phi$, si ϕ est une des formules suivantes :

$$\langle \ \rangle(\psi_0 \wedge \langle \ \rangle\psi_1) \leftrightarrow \langle \ \rangle\psi_0 \wedge \langle \ \rangle\psi_1 \,, \qquad \langle \ \rangle(\psi_0 \wedge [\ ]\psi_1) \leftrightarrow \langle \ \rangle\psi_0 \wedge [\ ]\psi_1 \,.$$

   et $\mathbf{F} = (S, R)$ est tel que R est une relation d'équivalence.
4. Argumentez que, pour toute formule modale ϕ, il existe une formule modale ψ (ayant les mêmes variables propositionnelles) de hauteur modale au plus 1, telle que $\vdash_{S5} \phi \leftrightarrow \psi$.
5. Observez que si ψ est une formule de profondeur modale 1, alors ψ est equivalente à une formule de la forme $\bigvee_i \psi_i$ où chaque ψ_i est une conjonction

$$\psi_i = \bigwedge_{j=1\ldots k_i} l_j$$

   où l_j est ou bien un littéral, ou bien il est de la forme $\langle \ \rangle\phi$ où ϕ ne contient pas des operateurs modaux, ou bien il est de la forme $[\ ]\phi$ où ϕ ne contient pas des operateurs modaux.
6. Montrez que si ϕ est satisfaisable dans un modèle où la relation R est un relation d'équivalence, alors elle satisfaisable dans un tel modèle qui, en plus, est fini. (Idée : si $\mathcal{M}, s \models \phi$, alors $\mathcal{M}, s \models \psi$ où ψ est équivalente à ϕ et de profondeur modale 1. Cherchez un donc un sous ensemble fini X d'états de $\mathcal{M}$ tel que $s \in X$ et tel que, à partir de X on puisse construire in modèle $\mathcal{M}'$ tel que $\mathcal{M}', s \models \psi$.)
7. Argumentez donc que la logique S5 est décidable.