Collection d'exos relatifs au cours 3

Exercice 1. Rappelez vous que $B_{\texttt{fcf}}$ denote l'algèbre de Boole des ensembles finis et confinis et que l'ensemble des ultrafiltres de $B_{\texttt{fcf}}$ est

$$\{\, \mathfrak{f}_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, f_\omega \,\}$$

où

$$\mathfrak{f}_n = \{\, \alpha \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \alpha \,\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}_\omega = \{\, \alpha \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \text{ est cofini } \,\}\,.$$

Nous pouvons étendre $B_{\texttt{fcf}}$ à une algèbre modale, en posant

$$\langle\ \rangle(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \text{ est fini,} \\ \alpha \cup \{\, 0 \,\} & \text{si } \alpha \text{ est cofini.} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de caractériser la relation binaire R sur les ultrafiltres correspondant à cet opérateur modal :

$$\mathfrak{f}\, R\, \mathfrak{g} \text{ ssi } [\ ]^{-1}\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}\,, \qquad \text{avec} \quad [\ ]^{-1}\mathfrak{f} = \{\, \alpha \in B_{\texttt{fcf}} \mid [\ ]\alpha \in \mathfrak{f} \,\}\,.$$

Question 1.1. Donnez une caractérisation explicite de l'opérateur de nécessité $[\ ](\alpha) = (\langle\ \rangle(\alpha^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}}$.

Question 1.2. Montrez que

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}R\mathfrak{g} \text{ ssi } & (i) \quad \forall \alpha \text{ fini, } \alpha \setminus \{\, 0 \,\} \in \mathfrak{f} \text{ implique } \alpha \in \mathfrak{g} \\ & \text{et} \\ & (ii) \quad \forall \alpha \text{ cofini, } \alpha \in \mathfrak{f} \text{ implique } \alpha \in \mathfrak{g}\,. \end{aligned}$$

Question 1.3. Montrez que pour $i \neq 0$ $\mathfrak{f}_i R \mathfrak{g}$ ssi $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_i$ et que $\mathfrak{f}_0 R \mathfrak{g}$ ssi $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_0$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_\omega$.

Exercice 2. Prouvez les propositions suivantes :

1. *si* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \leftrightarrow \phi'$ *et* $\vdash_{\mathbb{K}} \psi \leftrightarrow \psi'$, *alors* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \wedge \psi \leftrightarrow \phi' \wedge \psi'$.
2. *si* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \leftrightarrow \phi'$ *et* $\vdash_{\mathbb{K}} \psi \leftrightarrow \psi'$, *alors* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \vee \psi \leftrightarrow \phi' \vee \psi'$.
3. *si* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \leftrightarrow \psi$ *alors* $\vdash_{\mathbb{K}} \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$.
4. *si* $\vdash_{\mathbb{K}} \phi \leftrightarrow \psi$ *alors* $\vdash_{\mathbb{K}} \langle\ \rangle\phi \leftrightarrow \langle\ \rangle\psi$.

Exercice 3. Montrez que, pour $i = 1, 2$, la règle suivante

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_i} \wedge \texttt{Elim}_i$$

est admissible.

Exercice 4. Soit χ la formule $\langle\ \rangle\phi \wedge [\ ]\psi \to \langle\ \rangle(\phi \wedge \psi)$.

1. Montrez que $\mathcal{M}, s \models \chi$, pour tout $\mathcal{M}$ et $s \in \mathcal{M}$ (c'est-à-dire χ est une tautologie).
2. Montrez que $\vdash_{\mathbb{K}} \chi$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{M}$ le modèle canonique de la logique $\mathbb{K}$. C'est-à-dire, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}(\mathrm{Lyn}_{\mathbb{K}}), R, v \rangle$, où

— $\mathrm{Lyn}_{\mathbb{K}}$ est l'algèbre modale de Lyndenbaum et $\mathcal{U}(\mathrm{Lyn}_{\mathbb{K}})$ est l'ensemble de ses ultrafiltres,

— $\mathfrak{f}\, R\, \mathfrak{g}$ ssi $[\ ]^{-1}\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$,

— $v(x) = \{\, \mathfrak{f} \in \mathcal{U}(\mathrm{Lyn}_{\mathbb{K}}) \mid [x] \in \mathfrak{f} \,\}$.

Montrez que pour toute formule ϕ on a

$$\mathcal{M}, \mathfrak{f} \models \phi \text{ ssi } [\phi] \in \mathfrak{f}\,.$$

(Utilisez l'induction sur la structure des formules).

Exercice 6. Soient A et B deux algèbres modales. Un homomorphisme de A vers B est une fonction $f : A \to B$ telle que :

$$\begin{aligned} f(\neg x) &= \neg f(x) \\ f(\top) &= \top, & \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f([\ ]x) &= [\ ]f(x)\,. \end{aligned}$$

Question 6.1. Montrez que si $f : A \to B$ est un homomorphisme, alors on a aussi

$$\begin{aligned} f(\bot) &= \bot, & \qquad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \\ f(\langle\ \rangle x) &= \langle\ \rangle f(x)\,. \end{aligned}$$

Un *plongement* de A dans B est un homomorphisme injectif de A vers B. On dit que A *se plonge dans* B s'il existe un plongement de A vers B.
Une *sous-algèbre* de B est un sous-ensemble $C \subseteq B$ tel que $\top \in C$ et C est fermé sous les opérations $\wedge, \neg, [\ ]$.

Question 6.2. Montrez si C est un sous-algebre de B, alors C est aussi ferme sous les opérations $\vee, \langle\ \rangle$, de façon que C est lui meme une algèbre modale et que la fonction qui envoie $c \in C$ vers $c \in B$ est un plongement.
Un *isomorphisme* de A vers B est un homomorphisme bijectif de A vers B. On dit que A *est isomorphe à* B s'il existe un isomorphisme de A vers B.

Question 6.3. Montrez que A se plonge dans B si et seulement si A est isomorphe à une sous-algèbre de B.

Question 6.4. Argumentez que toute algèbre modale est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de la forme $\mathbf{F}^\sharp$, où $\mathbf{F}$ est un frame. Rappel : si $\mathbf{F} = (S, R)$ alors $\mathbf{F}^\sharp$ est

$$(P(S), S, \cap, \emptyset, \cup, (-)^{\mathsf{c}}, f) \qquad\qquad \text{avec} \quad f(\alpha) = \{\, s \in S \mid \exists s' \in \alpha \text{ t.q. } sRs' \,\}\,.$$