Collection d'exos relatifs au cours 3,5

Exercice 1. Avec cet exercice nous nous proposons de démontrer le Lemme de l'ultrafiltre. Rappelons ce lemme :
Lemme. Soient B une algèbre de Boole, $\mathbf{f} \subseteq B$ un filtre, et $x \in B$ tels que $x \notin \mathbf{f}$. Alors il existe un ultrafiltre $\mathbf{g} \subseteq B$ tel que $x \notin \mathbf{f}$.

Soient donc B une algèbre de Boole, $\mathbf{f} \subseteq B$ un filtre, et $x \in B$ tels que $x \notin B$.

1. Considérez l'ensemble $F := \{ \mathbf{f} \subseteq B \mid \mathbf{f} \text{ est un filtre}, x \notin \mathbf{f} \}$. Montrez que $F \neq \emptyset$, et que si $\{ f_i \mid i \in I \} \subseteq F$ est une chaîne, alors $\bigcup_{i \in I} \mathbf{f}_i \in F$. (C'est quoi une *chaîne* ?)
2. Utilisez le Lemme de Zorn [1] pour argumenter qu'il existe $\mathbf{g} \in F$ tel que pour tout fitre $\mathbf{g}'$, si $\mathbf{g}' \supseteq \mathbf{g}$ et $\mathbf{g}' \neq \mathbf{g}$, alors $x \in g'$. Rappelons que le Lemme de Zorn est l'énoncez suivant : *si F est une collection non vide d'ensembles tel que tout chaîne dans F a un majorant, alors F contient un ensemble maximal.* (Ça veut dire quoi qu'un ensemble appartenant à une collection d'ensembles élément est *maximal* ?)

Soit donc $\mathbf{g} \in F$ tel que pour tout filtre $\mathbf{g}'$, si $\mathbf{g}' \supseteq \mathbf{g}$ et $\mathbf{g}' \neq \mathbf{g}$, alors $x \in \mathbf{g}'$. En particulier, $\mathbf{g}$ est un filtre (car il appartient à F). Nous allons montrer que $\mathbf{g}$ est un ultrafiltre, ce qui suffit à demontrer le Lemme.
Pour ce faire, nous montrerons que $\mathbf{g}$ a cette propriété : $y \vee z \in \mathbf{g}$ implique $y \in \mathbf{g}$ ou $z \in \mathbf{g}$. Nous procéderons par l'absurde : nous allons supposer que $y \vee z \in \mathbf{g}$, $y \notin \mathbf{g}$, $z \notin \mathbf{g}$, et dériverons une contradiction.

3. Considérez l'ensemble $(\mathbf{g}, y) = \{ w \mid \exists g \in \mathbf{g} \text{ t.q. } g \wedge y \leq w \}$. Montrez que $(\mathbf{g}, y)$ est un filtre, $(\mathbf{g}, y) \supseteq \mathbf{g}$, $(\mathbf{g}, y) \neq \mathbf{g}$. Concluez qu'il existe $g_0 \in \mathbf{g}$ tel que $g_0 \wedge y \leq x$.
4. Argumentez qu'il existe $g_1 \in \mathbf{g}$ tel que $g_1 \wedge z \leq x$.
5. Argumentez que $g_0 \wedge g_1 \in \mathbf{g}$, $g_0 \wedge g_1 \wedge y \leq x$, $g_0 \wedge g_1 \wedge z \leq x$, $g_0 \wedge g_1 \wedge (y \vee z) \leq x$, et $g_0 \wedge g_1 \wedge (y \vee z) \in \mathbf{g}$.
6. Concluez que $x \in \mathbf{g}$ (ici on a donc une contradiction).

1. Jetez un coup d'oeil à la page Wikipedia sur ce Lemme, `https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Zorn`, et regardez de quelle façon le Lemme est équivalent à l'axiome du choix en théorie des ensembles.