Collection d'exos relatifs au cours 2

Exercice 1. Le nombre de modèles arborescents réduits de profondeur k est compté par la fonction f définie par récurrence comme suit :

$$
\begin{aligned}
f(n,m,0) &= 2^n \\
f(n,m,k+1) &= m2^{n+f(n,m,k)}\,,
\end{aligned}
$$

où n est la cardinal de $Prop$, et m est la cardinal de Act.

1. Estimez une borne supérieure $t(n,m,k)$ sur la taille maximale d'un modèle arborescent réduit de profondeur k.
2. Argumentez, avec précision, pour l'énonce suivant : *si ϕ est une formule de profondeur modale k ayant au plus r variables propositionnelles, alors il existe un modèle fini $\mathcal{M}$ de taille au plus $t(r,m,k)$ et $s \in \mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}, s \models \phi$.*

Exercice 2. On dit qu'une propriété P (des états d'un modèle) est définissable en logique modale s'il existe une formule modale ϕ telle que, pour tout modèle $\mathcal{M}$ et état s,

$$s \text{ a la propriété } P \text{ ssi } \mathcal{M}, s \models \phi\,.$$

Considérez les propriétés P et Q suivantes :

$$
\begin{aligned}
P(s) &:= \text{ il existe un chemin infini dans } \mathcal{M} \text{ à partir de } s, \\
Q(s) &:= \text{ dans } \mathcal{M}, \text{ tout chemin depuis } s \text{ se termine.}
\end{aligned}
$$

1. Montrez que P est définissable ssi Q est définissable en logique modale.
2. Montrez qu'aucune de ces deux propriétés est définissable en logique modale. (Idée : si une formule ϕ définit P, alors cette formule a une profondeur modale bornée k, et donc elle ne peut pas "voir" plus loin que k étapes dans la bisimulation. Exhibez donc s et s' tels que $s \sim_k s'$, tels que $P(s)$ et $Q(s')$.

Exercice 3. Rappelons que l'on peut étendre l'algèbre de Boole $B_{\mathtt{fcf}}$ des ensembles finis et cofinis à un algèbre modale en définissant

$$
\langle\ \rangle(\alpha) = \begin{cases} \alpha\,, & \text{si } \alpha \text{ est fini,} \\ \{\,0\,\} \cup \alpha\,, & \text{si } \alpha \text{ est cofini.} \end{cases}
$$

Donnez une description explicite de l'opérateur dual de nécessité, défini par $[\ \ ]\alpha = (\langle\ \rangle\alpha^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$.

Exercice 4. Soit B un algèbre de Boole. Rappelons qu'un filtre est un sousensemble $\mathfrak{f} \subseteq B$ tel que

1. $\top \in B$,
2. $x, y \in B$ implique $x \wedge y \in B$,
3. $x \in B$ et $x \leq y$ implique $y \in B$.

Un ultrafiltre est un filtre $\mathfrak{f}$ tel que $\bot \not\in \mathfrak{f}$ et maximal avec cette propriété (donc : pour tout filre $\mathfrak{f}'$, si $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{f}'$, alors $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$ ou $\bot \in \mathfrak{f}'$). Montrez que le conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathfrak{f}$ est un ultrafiltre,
2. $\mathfrak{f}$ est un filtre, et $x \in \mathfrak{f}$ si et seulement si $\neg x \not\in \mathfrak{f}$, (*)
3. $\mathfrak{f}$ est un filtre, et $x \vee y \in \mathfrak{f}$ implique $x \in \mathfrak{f}$ ou $y \in \mathfrak{f}$.

(*) Pour montrer que si $\neg x \not\in \mathfrak{f}$ alors $x \in \mathfrak{f}$, assumez que $\neg x \not\in \mathfrak{f}$ et $x \not\in \mathfrak{f}$. Montrez que l'ensemble $\mathfrak{f}^x := \{\, y \mid x \wedge z \leq y,\ \text{pour quelque } z \in \mathfrak{f}\,\}$, est un filtre. Argumentez que $\bot \in \mathfrak{f}^x$, dérivez une contradiction.

Exercice 5. Soit $B_{\texttt{fcf}}$ l'algèbre de Boole des ensembles finis et confinis. Nous souhaitons caractériser l'ensemble $\mathcal{U}f(B_{\texttt{fcf}})$ des ultrafiltres de $B_{\texttt{fcf}}$.

1. Montrez que pour tout $n \geq 0$, l'ensemble $\mathfrak{f}_n = \{\, \alpha \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \alpha \,\}$ est un ultrafiltre.
2. Montrez que l'ensemble $\mathfrak{f}_\omega = \{\, \alpha \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \text{ est cofini } \}$ est un ultrafiltre.
3. Argumentez que, si $\alpha \in \mathfrak{f}$ avec α fini, alors $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_n$ pour un nombre entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Concluez que $\mathcal{U}f(B_{\texttt{fcf}}) = \{\, \mathfrak{f}_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, f_\omega \,\}$.