Collection d'exos relatifs au cours 1

Exercice 1. Supposons $Act = \{ a, b \}$ et $Prop = \{ p, q \}$. Proposez deux modèles différèrent $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ (donnez à la fois un dessin de chaque modèle et sa définition formelle) et deux formules ϕ et ψ et calculez $\|\phi\|_{\mathcal{M}}$, $\|\psi\|_{\mathcal{M}}$, $\|\phi\|_{\mathcal{N}}$, $\|\psi\|_{\mathcal{N}}$.
Contraintes à respecter :

1. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ contiennent des cycles ;
2. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont au moins 5 états/éléments ;
3. ϕ et ψ ont profondeur modale au moins 2.

Exercice 2. Soit $\mathcal{M} = \langle S, \{ R_a \mid a \in Act \}, v \rangle$ un modèle, et rappelons que

$$f_a(Y) = \{ x \in S \mid \exists y \in Y \text{ t.q. } s \xrightarrow{a} t \}$$

pour tout $Y \subseteq S$. Montrez que

$$f_a(\bigcup_{i \in I} Y_I) = \bigcup_{i \in I} f_a(Y_i)$$

pour toute famille $\{ Y_i \mid i \in I \}$, même dans le cas que cette famille a taille infinie.

Exercice 3. On suppose $Prop = \{ p_1, \ldots, p_n \}$. Rappel :

$$\nabla_a \{ \phi_1, \ldots, \phi_n \} = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} \langle a \rangle \phi_i \wedge [a] (\bigvee_{i=1,\ldots,n} \phi_i) \,.$$

Pour un état s d'un modèle $\mathcal{M}$, soit

$$\phi_{0,s} = \bigwedge_{s \in v(p)} p \wedge \bigwedge_{s \notin v(p)} \neg p$$
$$\phi_{n+1,s} = \phi_{0,s} \wedge \bigwedge_{a \in Act} \nabla_a \{ \phi_{t,n} \mid s \xrightarrow{a} t \} \,.$$

Montrez que, pour tout $n \geq 0$, $s \sim_n s'$ si et seulement si $s' \models \phi_{s,n}$.

Exercice 4. Soient $\mathcal{M} = \langle S, \{ R_a \mid a \in Act \}, v \rangle$ et $\mathcal{N} = \langle S', \{ R_a \mid a \in Act \}, v' \rangle$ deux modèles.

$$\varsigma_r(X) = \{ (s, s') \mid \forall a \in Act \, s \xrightarrow{a} t \text{ implique } s' \xrightarrow{a} t', \text{pour quelque } t' \in S' \text{ t.q. } (t, t') \in X \}$$
$$\varsigma_l(X) = \{ (s, s') \mid \forall a \in Act \, s' \xrightarrow{a} t' \text{ implique } s \xrightarrow{a} t, \text{pour quelque } t \in S \text{ t.q. } (t, t') \in X \} \,.$$

1. Montrez que ces deux fonctions sont croissantes (ou monotones, une fonction g étant monotone si $X \subseteq Y$ implique $g(X) \subseteq g(Y)$).
2. Argumentez que la fonction

   $$f(X) = \{ (s, s') \mid s \in v(p) \text{ ssi } s' \in v(p) \} \cap \varsigma_l(X) \cap \varsigma_r(X) \,.$$

   est aussi monotone.
3. Montrez qu'une relation binaire $B \subseteq S \times S'$ est une bisimulation si et seulement si $B \subseteq f(B)$, où f est la fonction définie ci-dessus.
4. Soit $g : P(X) \to P(X)$ une fonction monotone. Montrez que l'ensemble des $Y \subseteq X$ tels que $Y \subseteq g(Y)$ est fermé sous des unions arbitraires. Concluez qu'il existe un plus grand sous-ensemble tel que $Y \subseteq g(Y)$.

5. Montrez que, si X est fini, il existe $n \geq 0$ tel que $g^n(X) = g^{n+1}(X)$, de façon que $g^n(X)$ est le plus grand Y tel que $Y \subseteq g(Y)$.
6. Argumentez que la relation $\sim \cap S \times S'$ est une bisimulation, notamment la plus grande bisimulation.
7. Donnez une méthode pour calculer si $s \sim s'$.

Exercice 5. Considérez le modèle (monomodale) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ où

$$
\begin{aligned}
S &= \{\, 0 \,\} \cup \{\, (i,j) \mid 1 \leq i \leq j < \omega \,\} \\
R &= \{\, (0,(1,j)) \mid 1 \leq j < \omega \,\} \cup \{\, ((i,j),(i+1,j)) \mid 1 \leq i < j < \omega \,\}
\end{aligned}
$$

et $v(p) = \emptyset$, pour tout $p \in \mathit{Prop}$. Considérez maintenant le modèle $\mathcal{N} = \langle S', R', v' \rangle$ où

$$
\begin{aligned}
S' &= S \cup \{\, (i,\hat{\omega}) \mid 1 \leq i < \omega \,\} \\
R' &= R \cup \{\, (0,(1,\omega)) \,\} \cup \{\, ((i,\omega),(i+1,\omega)) \mid 1 \leq i < \omega \,\}
\end{aligned}
$$

On a $v'(p) = v(p) = \emptyset$. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux arbres, appelons donc $\rho_{\mathcal{M}}$ et $\rho_{\mathcal{N}}$ leurs racines.

1. Esquissez un dessin de ces deux modèles.
2. Montrez que $\rho_{\mathcal{M}} \sim_n \rho_{\mathcal{N}}$, pour tout $n \geq 0$, mais $\rho_{\mathcal{M}} \not\sim \rho_{\mathcal{N}}$.