

TD n° 2

Calcul Propositionnel - Conséquences logiques

Rappels, notations. Dans toute cette planche, Σ et Γ désignent deux ensembles *quelconques* (finis ou non, éventuellement vides) de formules. De même, φ et ψ dénotent deux formules propositionnelles quelconques.

Dans cette planche, on notera aussi :

$$\begin{aligned} \text{Taut} &= \{ \varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}} \mid \text{mod}(\varphi) = \text{Val} \}, & \text{NonSat} &= \{ \varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}} \mid \text{mod}(\varphi) = \emptyset \}, \\ \text{Cons}(\Sigma) &= \{ \varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}} \mid \Sigma \models \varphi \}. \end{aligned}$$

Taut est l'ensemble des tautologies, NonSat est l'ensemble des formules non-satisfaisables, et Cons(Σ) est l'ensemble des conséquences logiques de Σ .

Pour rappel, si A et B sont deux ensembles, alors

- pour prouver que $A \subseteq B$, on montre que "pour tout élément a , si $a \in A$ alors $a \in B$ "
- pour prouver que $A = B$ on montre que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$
- $a \in A \cap B$ ssi $a \in A$ et $a \in B$
- $a \in A \cup B$ ssi $a \in A$ ou $a \in B$

Exercice 2.1. On considère l'ensemble de formules propositionnelles

$$\Gamma = \{ p \vee q \vee r, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \}$$

1. Trouver un modèle de Γ . Combien y a-t-il de modèles ?
2. Les formules $q \Rightarrow p$, p , r sont elles des conséquences logiques de Γ ?

Exercice 2.2. On se donne Γ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule φ conséquence de Γ , une formule ψ qui n'est pas une conséquence de Γ .

1. On ajoute une tautologie τ à Γ . Est-ce que φ et ψ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{ \tau \}$?
Donnez une preuve formelle.
2. Même question si τ est une formule insatisfaisable.

Exercice 2.3 (Modélisation). On dispose de trois cases alignées, notées 1, 2, 3 de gauche à droite, et de pions de formes différentes : triangle, rond ou carré. Les pions peuvent-être placés dans les cases. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$ on note c_i l'assertion : « la case i contient un pion carré », et on fait de même pour les autres formes.

1. Modélisez, avec des formules du calcul propositionnel, les deux assertions suivantes : « il y a un pion rond immédiatement à droite d'un pion carré » et « chaque case contient un (et un seul) pion ».
2. Donnez les modèles de l'ensemble composé par ces deux formules. Que peut-on en déduire quant au pion situé dans la case 2 ?

Exercice 2.4. Démontrer :

1. $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{ \neg \varphi \} \models \perp$.
2. $\Sigma \cup \{ \varphi \} \models \psi$ ssi $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi$.
3. $\varphi \equiv \psi$ ssi $\text{Cons}(\varphi) = \text{Cons}(\psi)$.

Exercice 2.5. Démontrer :

1. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\text{mod}(\Gamma) \subseteq \text{mod}(\Sigma)$ (vu en cours);
2. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\text{Cons}(\Sigma) \subseteq \text{Cons}(\Gamma)$;
3. $\Sigma \subseteq \text{Cons}(\Sigma)$;
4. $\text{mod}(\text{Cons}(\Sigma)) = \text{mod}(\Sigma)$ (partiellement vu en cours);
5. $\text{mod}(\Sigma) = \text{mod}(\Gamma)$ ssi $\text{Cons}(\Sigma) = \text{Cons}(\Gamma)$;
6. $\text{Cons}(\text{Cons}(\Sigma)) = \text{Cons}(\Sigma)$;
7. $\text{mod}(\Sigma) \subseteq \text{mod}(\Gamma)$ ssi $\text{Cons}(\Gamma) \subseteq \text{Cons}(\Sigma)$.

Exercice 2.6. Démontrer, pour toute formule φ :

1. $\text{Taut} \subseteq \text{Cons}(\varphi)$.
2. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \text{Taut}$.
3. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \mathcal{F}_{\text{cp}}$.
4. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\Gamma)$.
5. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\varphi)$.

Exercice 2.7. Un ensemble de formules Γ est dit *complet* ssi

Γ est consistant et, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}}$, $\Gamma \models \varphi$ ou $\Gamma \models \neg\varphi$

1. Montrez que Γ est complet ssi il a un et un seul modèle.
2. Donnez l'exemple d'un ensemble complet et d'un ensemble non complet.
3. Si ν est une valuation, on appelle *théorie* de ν , et on note $\text{TH}(\nu)$, l'ensemble des formules satisfaites par ν . Autrement dit, $\text{TH}(\nu) = \{\varphi \in \mathcal{F}_{\text{cp}} \mid \nu(\varphi) = 1\}$. Montrez que, pour tout $\nu \in \text{Val}$, $\text{TH}(\nu)$ est complet.
4. Montrez que $\text{Cons}(\text{TH}(\nu)) \subseteq \text{TH}(\nu)$.
5. Donnez l'exemple d'un ensemble complet qui n'est pas de la forme $\text{TH}(\nu)$.

Exercice 2.8. Soit Γ un ensemble complet tel que $\text{Cons}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Prouvez que :

1. $\varphi \in \Gamma$ ssi $\neg\varphi \notin \Gamma$,
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$,
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.