TD n° 1

Calcul propositionnel — syntaxe et sémantique

Syntaxe

Exercice 1.1. Considérez les formules du calcul propositionnel suivantes :

$\varphi_1 := \quad r \vee (p \neg((\wedge q) \Rightarrow \neg r))$;

$\varphi_2 := \quad p \wedge (r \wedge ((\neg q) \Rightarrow \neg p))$;

$\varphi_3 := \quad ((q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \ \wedge \ ((\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q))$.

Pour chaque formule $\varphi_i \in \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

1. dessinez son arbre syntaxique ;
2. énumérez ses sous-formules ;
3. énumérez les symboles propositionnels ayant une occurrence dans φ_i.

Sémantique

Exercice 1.2. 1. Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$?

2. Énumérez les modèles de la formule $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
3. Est ce que cette formule est (in)satisfaisable, valide ?

Exercice 1.3. On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

1. Soit v une valuation. Déterminer, *si possible*, $v(\varphi)$ et $v(\psi)$ dans chacun des quatre cas suivants :
   (a) on sait que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$;
   (b) on sait que $v(p) = 0$;
   (c) on sait que $v(q) = 1$;
   (d) on ne sait rien sur $v(p)$ et $v(q)$.
2. Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Des tautologies ?
3. L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est-il consistant ? C'est-à-dire, existe t'il une valuation telle que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$?

Exercice 1.4. Une formule φ est dite *contingente* lorsqu'elle est satisfaisable et non une tautologie. Dire si les formules suivantes sont insatisfiables, contingentes, ou encore des tautologies :

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge (\neg r \vee s)$

Exercice 1.5. Soit φ une formule du calcul propositionnel.

1. Que peut-on dire de $\mathsf{mod}(\varphi)$ lorsque φ est contingente ?
2. Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Que pensez-vous des affirmations suivantes :
   (a) si φ est contingente, alors $\neg\varphi$ l'est également ;
   (b) si φ et ψ sont contingentes, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont contingentes ;
   (c) si $\varphi \vee \psi$ est insatisfiable alors φ et ψ sont insatisfiables ;
   (d) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ et ψ sont des tautologies.
   (e) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ est une tautologie, ou ψ est une tautologie.

Exercice 1.6. Montrez qu'une formule φ est une tautologie si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfaisable. On suppose donné un algorithme qui vérifier si une formule est une tautologie ; construire un autre algorithme pour vérifier si une formule est satisfaisable.

Exercice 1.7. Proposez une formule φ ayant la table de vérité suivante :

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 1.8. Dans cet exercice, on identifie l'ensemble $\{0,1\}$ au corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs $\wedge,\vee,\neg$;
2. Exprimer les connecteurs $\wedge,\vee,\neg$ à l'aide des opérations $+$ et $\times$;
3. Montrer qu'à toute formule propositionnelle φ dont les variables sont $q_1,\dots q_n$, on peut associer un polynôme à n indéterminées P tel que $\varphi = P(a_1,...,a_n)$, et tel que, pour toute valuation v, on a $v(\varphi) = P(v(q_1),\dots,v(q_n))$.
4. En déduire une méthode pour déterminer si deux formules sont logiquement équivalentes, ou si une formule est une tautologie.

Exercice 1.9. Prouvez les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{array}{ccr}
\varphi\wedge\psi \equiv \psi\wedge\varphi & \varphi\vee\psi \equiv \psi\vee\varphi & \text{(Commutativité)}\\
\varphi\wedge(\psi_1\wedge\psi_2) \equiv (\varphi\wedge\psi_1)\wedge\psi_2 & \varphi\vee(\psi_1\vee\psi_2) \equiv (\varphi\vee\psi_1)\vee\psi_2 & \text{(Associativité)}\\
\top\wedge\varphi \equiv \varphi\wedge\top \equiv \varphi & \bot\vee\varphi \equiv \varphi\vee\bot \equiv \varphi & \text{(Élements neutres)}\\
\varphi\wedge\varphi \equiv \varphi & \varphi\vee\varphi \equiv \varphi & \text{(Idempotence)}\\
\varphi\wedge(\varphi\vee\psi) \equiv \varphi & \varphi\vee(\varphi\wedge\psi) \equiv \varphi & \text{(Absorption)}\\
\varphi\wedge\bot \equiv \bot\wedge\varphi \equiv \bot & \varphi\vee\top \equiv \top\vee\varphi \equiv \top & \text{(Elément absorbant)}\\
\varphi\wedge(\psi_1\vee\psi_2) \equiv (\varphi\wedge\psi_1)\vee(\varphi\wedge\psi_2) & \varphi\vee(\psi_1\wedge\psi_2) \equiv (\varphi\vee\psi_1)\wedge(\varphi\vee\psi_2) & \text{(Distributivité)}\\
\varphi\wedge\neg\varphi \equiv \neg\varphi\wedge\varphi \equiv \bot & \varphi\vee\neg\varphi \equiv \neg\varphi\vee\varphi \equiv \top & \text{(Complément)}\\
\neg\neg\varphi \equiv \varphi & & \text{(Involution)}\\
\neg(\varphi\wedge\psi) \equiv \neg\varphi\vee\neg\psi & \neg(\varphi\vee\psi) \equiv \neg\varphi\wedge\neg\psi & \text{(Lois de De Morgan)}\\
\varphi\Rightarrow\psi \equiv \neg\varphi\vee\psi \equiv \neg(\varphi\wedge\neg\psi) & & \text{(Implication matérielle)}\\
\varphi\Rightarrow\psi \equiv \neg\psi\Rightarrow\neg\varphi & & \text{(Contraposition)}\\
\varphi_1\Rightarrow(\varphi_2\Rightarrow\varphi_3) \equiv (\varphi_1\wedge\varphi_2)\Rightarrow\varphi_3 & & \text{(Curryfication)}
\end{array}$$