TD n° 7

Premier-Ordre - Formes normales

FORMES NORMALES

Exercice 7.1. *(Forme prénexe).* Donner une forme prénexe des formules suivantes, en précisant les étapes de calcul :

1. $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow \exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))$

Exercice 7.2. *(Skolémisation).* Mettre en forme prénexe puis skolémiser les formules :

1. $\neg(\neg\varphi(x) \vee \forall x \psi(x)) \wedge (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \tau(x))$
2. $(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x)))$

Exercice 7.3. *(Formes prenexes et clausales).*

1. Donnez une forme prénexe et ensuite une forme clausale de la formule suivante, en précisant les étapes de calcul :

$$(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))).$$

2. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de la formule :

$$\forall x \neg R(x,x) \;\wedge\; \exists x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \exists z R(z,x)) \;\wedge\; \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x))).$$

SUBSTITUTIONS

Exercice 7.4. Soit $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,2),(c,0)\}$. Après avoir rappelé la définition de composition de substitutions, calculez $\sigma_1 \circ \sigma_2$ pour chacun des cas suivants.

1. $\sigma_1 = [g(f(y),c)/x, f(g(x,y))/y]$ et $\sigma_2 = [g(f(y),c)/y, f(g(x,y))/x]$,
2. $\sigma_1 = [g(f(y),c)/x, f(g(x,w))/y]$ et $\sigma_2 = [g(f(y),c)/z, f(g(x,y))/w]$.

Exercice 7.5. Montrez que l'application d'une substitution à un terme obéit les lois suivantes :

$$t[] = t\,, \qquad\qquad (t\sigma)\rho = t(\rho \circ \sigma)\,.$$

(Rappelez d'abord la définition de l'application et celle de la composition, puis développez votre preuve par induction sur la structure d'un terme). Argumentez que, par conséquent, les lois suivantes sont satisfaites :

$$\rho \circ [] = \rho = [] \circ \rho\,, \qquad\qquad (\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)\,.$$

Exercice 7.6. Argumentez que, si $x \notin Var(t)$, alors la substitution $[t/x]$ est un MGU du problème (x,t). Que peut on dire si $x \in Var(t)$?

Exercice 7.7. Proposez deux unificateurs σ et ρ du problème

$$\pi := (f(g(x),y)\,,\, f(g(y),h(z)))\,.$$

MODÈLES

Exercice 7.8. Considérez la formule φ suivante :

$$\exists x \forall y \neg(f(y) = x) \wedge \forall x\, g(f(x)) = x.$$

1. Donnez un modèle de cette formule.
2. Argumentez que si $\mathscr{M}$ est un modèle de φ, alors $D_{\mathscr{M}}$ est un ensemble infini.

MATHS ET LOGIQUE

Exercice 7.9. Une relation binaire r est *réflexive* si tout élément est en relation avec lui-même. Elle est *symétrique* si pour tout couple d'éléments x, y si x est en relation avec y alors y est en relation avec x. Elle est *irréflexive* si aucun élément n'est en relation avec lui-même. Elle est *transitive* si si x est en relation avec y, y avec z alors x est en relation avec z.

1. Ecrire les formules du premier ordre correspondant à ces propriétés.
2. Ecrire une formule signifiant qu'une relation symétrique et transitive est réflexive. Cette formule a-t-elle un modèle ? Peut-on donner une interprétation qui la falsifie ?
3. Ecrire une formule signifiant qu'une relation transitive et irréflexive est symétrique. Cette formule a-t-elle un modèle ? Peut-on donner une interprétation qui la falsifie ?

Exercice 7.10. Soit le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$, où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2)\}$. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat r contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat r est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.