TD n° 4

Calcul Propositionnel : DPLL, Coupure, Modélisation

L'ALGORITHME DE DAVIS-PUTNAM-LOGEMANN-LOVELAND

Exercice 4.1. *(Algorithme DPLL).* Transformez la formule suivante :

$$\varphi = \neg[(p \Rightarrow s) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (s \wedge q \wedge r \wedge \neg p)))]$$

en FNC et appliquez ensuite l'algorithme de DPLL pour trouver un modèle. Justifiez chaque choix d'un littéral par une des heuristiques parmi littéral pur, DLIS, ou MOM's. Répétez ensuite l'exercice avec la formule

$$\varphi = (p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \Leftrightarrow (r \wedge (p \vee s))).$$

Remarque : si vous ne le trouvez vite, l'ensemble de clauses qui correspond à cette formule est :

$$\mathscr{C} = \{\neg p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ q \vee r,\ q \vee p \vee s,\ \neg q \vee \neg r \vee \neg p,\ \neg q \vee \neg r \vee \neg s\}.$$

MÉTHODE DE LA COUPURE

Exercice 4.2. Utiliser la méthode de la coupure pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$.
8. $\models (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q))$.
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.
10. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Exercice 4.3. Rappelons qu'un ensemble de clauses $\mathscr{S}$ est *saturé* si $\mathscr{S} \vdash_R C$ implique $C \in \mathscr{S}$. On dit qu'un tel ensemble est *cohérent* si $\perp \notin \mathscr{S}$.

1. Donnez un exemple d'un ensemble saturé et cohérent.
2. Donnez un exemple d'un ensemble fini de clauses $\mathscr{C}$ tel que tout ensemble saturé $\mathscr{S}$ avec $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$ est infini.
3. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé, alors il en est de même pour $\mathscr{S}[p \leftarrow \perp]$.
4. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé et cohérent, et $\mathscr{S}[p \leftarrow \perp]$ n'est pas cohérent, alors $p \in \mathscr{S}$.
5. Argumentez que si $\mathscr{S}$ est saturé et cohérent, alors au moins un parmi $\mathscr{S}[p \leftarrow \perp]$ et $\mathscr{S}[p \leftarrow \top]$ est saturé et cohérent.

Exercice 4.4. Une clause est *factorisée* si elle ne contient pas deux occurrences du même littéral.

1. Donnez un exemple de clause factorisée, et un exemple de clause qui n'est pas factorisée.
2. Proposez une borne supérieure au nombre de clauses factorisées, quand $\text{PROP} = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

3. Soit $f(C)$ la clause factorisée obtenue de C en éliminant toute double occurrence d'un littéral. Argumentez que $C \vdash_R f(C)$ et que $f(C) \ll C$ (c'est-à-dire, $f(C)$ subsume C).
4. Soit $\mathscr{C}$ un ensemble de clauses et posons $\mathscr{C}' := \{ f(C) \mid C \in \mathscr{C} \}$. Montrez que $\mathsf{mod}(\mathscr{C}) = \mathsf{mod}(\mathscr{C}')$.
5. Soient C_0, C_1, C_2 trois clauses ; soient aussi C_1' et C_2' deux clauses factorisées telles que $C_1' \ll C_1$ et $C_2' \ll C_2$. Argumentez que si on peut déduire C_0 de C_1 et C_2 par la règle de résolution, alors ou bien $C_i' \ll C_i$ pour un quelque $i = 1,2$, ou bien il existe une clause factorisée C_0' telle que $\{ C_1', C_2' \} \vdash_R C_0'$ et $C' \ll C_0$.
6. Proposez une méthode permettant d'arrêter les inférences—par coupure et/ou factorisation—à partir d'un ensemble $\mathscr{C}$ satisfiasable.

MODÉLISATION

Exercice 4.5. Le lieutenant Colombo enquête sur le crime commis la nuit du 11 octobre. Il dispose des informations suivantes :

1. Jacques ou Martin est coupable.
2. Si Martin est coupable, alors le crime a eu lieu avant minuit.
3. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Jacques est coupable.
4. Le crime a eu lieu avant minuit.

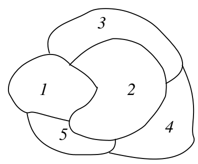
Que peut-il en déduire sur l'identité du (ou des) coupable(s) ? Même question s'il dispose de l'information supplémentaire :

5. Si Jacques est coupable, alors le crime a eu lieu après minuit.

(Modélisez ces informations en logique propositionnelle et utilisez la méthode de la coupure pour les déductions).

Exercice 4.6. *(Coloration de graphe).*

1. Peut-on colorier la carte ci-dessous avec trois couleurs (Rouge, Vert, Bleu par exemple), de sorte que deux régions adjacentes soient de couleurs distinctes ? Modéliser ce problème en calcul propositionnel.



2. En 1977, Appel et Haken prouvent le *Théorème des 4 couleurs* :

   Il suffit de 4 couleurs pour colorier les noeuds de tout graphe planaire fini de telle sorte que deux noeud adjacents n'aient pas la même couleur.

   En utilisant le théorème de compacité, montrez le *Théorème des 4 couleurs pour les graphes infinis* :

   Il suffit de 4 couleurs pour colorier les noeuds de tout graphe planaire infini de telle sorte que deux noeud adjacents n'aient pas la même couleur.