TD n° 3

Calcul Propositionnel - Équivalences, algorithmes, modélisation

Soient $\varphi, \theta \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$ et $q \in \textsc{Prop}$; la substitution, dans la formule φ, de la variable q par la formule θ, notée $\varphi_{[q\leftarrow\theta]}$, se définit par induction sur la structure d'une formule selon les cas suivants :

$$p_{[q\leftarrow\theta]} := \begin{cases} \theta\,, & \text{si } p = q\,, \\ p\,, & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

$$(\psi \circ \psi')_{[q\leftarrow\theta]} := \psi_{[q\leftarrow\theta]} \circ \psi'_{[q\leftarrow\theta]}\,, \text{ ou } \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}\,, \qquad (\neg\psi)_{[q\leftarrow\theta]} := \neg(\psi_{[q\leftarrow\theta]})\,.$$

Exercice 3.1. *(Substitution).* Ecrivez explicitement $\varphi_{[p\leftarrow\theta]}, \varphi_{[q\leftarrow\theta]}$, et $\varphi_{[r\leftarrow\theta]}$, où

1. $\varphi := [(q \vee \neg p) \Rightarrow r] \wedge [r \Rightarrow (\neg p \vee q)]$ et $\theta := \neg\neg q \vee \neg p$,
2. $\varphi := [(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)] \wedge [(\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow r]$ et $\theta := \neg p \vee q$.

Exercice 3.2. *(Substitution).* Considérez cet enoncé : *si* $\theta \equiv \theta'$, *alors* $\varphi_{[q\leftarrow\theta]} \equiv \varphi_{[q\leftarrow\theta']}$. Prouvez que l'enoncé est vrai, pour tout $\varphi, \theta, \theta' \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$ et $q \in \textsc{Prop}$. (Conseil : par induction sur la structure de $\varphi, \ldots$)

Exercice 3.3. *(Raisonnement algébrique).*

1. Argumentez que la relation $\equiv$ entre formules propositionnelles est réflexive symétrique et transitive (c'est-à-dire, c'est une relation d'équivalence).
2. En utilisant une suite d'équivalences, montrez que la formule

$$\varphi := [(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)] \wedge \neg[(\neg\neg p \vee \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)]$$

est équivalente à $\top$. Justifiez votre calcul, en faisant appel, à chaque équivalence, à une des équivalences classiques entre formules propositionnelles vues en cours.

Exercice 3.4. *(Forme normale conjonctive).*

1. Calculer une forme clausale (conjonctive) de chacune des formules suivantes
   (a) $\psi_1 = (p \wedge \neg((q \vee r) \Rightarrow p)) \vee s$;
   (b) $\psi_2 = (p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2)$;
   (c) $\psi_3 = \neg((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s))$.
2. Que pensez de l'énoncé : « la forme clausale d'une formule est unique à associativité-commutativité de $\wedge, \vee$ près » ? Démontrez-le si vous pensez c'est vrai, ou sinon trouvez un contre-exemple.

Exercice 3.5. *(Algorithme de Quine).* Transformez la formule suivante :

$$\varphi = (p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \Leftrightarrow (r \wedge (p \vee s)))$$

en forme normale conjonctive et appliquez ensuite l'algorithme de Quine pour trouver les modèles de φ.

Exercice 3.6. *(Des FNCs très larges).* Pour chaque $n > 0$, on définit les formules

$$\varphi_n = (p_{1,0} \wedge p_{1,1}) \vee \ldots \vee (p_{n,0} \wedge p_{n,1})\,, \qquad \psi_n = \bigwedge_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}} p_{1,f(1)} \vee \cdots \vee p_{n,f(n)}\,.$$

Montrez (en utilisant les équivalences et l'induction sur les entiers positifs) que ψ_n est une FNC de φ_n. Quel est la taille de ψ_n par rapport à celle de φ_n ?

Exercice 3.7. Une clause C est complète par rapport à un ensemble de symboles propositionnels $\{ p_1, \dots, p_n \}$ si, pour tout $i = 1, \dots, n$, soit p_i apparait dans la clause, soit $\neg p_i$ apparait dans C (mais pas tous les deux).

1. Proposez deux formules équivalentes sous FNC, avec ces propriétés : (a) ces formules ont un nombre diffèrent de clauses; (b) les clauses de ces formules sont distinguées. Argumentez donc que la forme normale conjonctive n'est pas une unique, même à associativité, commutativité et idempotence près.
2. Montrez que toute formule dont les symboles propositionnels sont parmi $\{ p_1, \dots, p_n \}$ est équivalente à une formule en FNC, dont toutes les clauses sont complètes (par rapport à $\{ p_1, \dots, p_n \}$). Montrez que cette forme normale est unique à associativité, commutativité et idempotence près.

Exercice 3.8. *(Simplifications des clauses).* Une clause C_0 *subsume* une clause C_1 quand tout littéral de C_0 est aussi un littéral de C_1. On écrit alors $C_0 \ll C_1$.

— Montrez $C_0 \ll C_1$ implique $C_0 \models C_1$.
— Argumentez que $\ll$ est un preordre (relation réflexive et transitive).
— Argumentez que, lorsque on veut calculer un modèle de $\mathscr{C}$, on peut retirer de $\mathscr{C}$ toute clause C_1 s'il existe une clause $C_0 \in \mathscr{C}$ de taille plus petite telle que $C_0 \ll C_1$

Exercice 3.9. *(Évaluation de la performance de l'algorithme de Quine).* Pour tout $n \geq m \geq 1$, soit

$$\mathscr{C}_{n,1} := \{ p_n \}$$

et, pour $1 \leq k < n$,

$$\mathscr{C}_{n,k+1} := \mathscr{C}_{n+k} \cup \{ p_{n-k+1} \Rightarrow p_{n-k} \} = \{ p_n, p_n \Rightarrow p_{n-1}, \dots, p_{n-k+1} \Rightarrow p_{n-k} \}.$$

Remarque : $C_{n,k}$ contient les dernières k variables propositionnelles $p_n, p_{n-1}, \dots p_{n+1-k}$.

Nous souhaitons estimer la performance de l'algorithme de Quine avec $\mathscr{C}_{n,n}$ en entrée. Nous allons donc compter le nombre des noeuds de l'arbre de Herbrand visités par l'algorithme de Quine avec entrée $\mathscr{C}_{n,k}$.

1. Donnez une formule pour la fonction $f(k)$ qui, pour $k \geq 1$, compte les noeuds de l'arbre de Herbrand visités par l'algorithme avec entrée $\mathscr{C}_{n,k} \cup \{ \neg p_{n+1-k} \}$.
2. Donnez une formule pour la fonction $g(k)$ qui, pour $k \geq 1$, compte les noeuds de l'arbre de Herbrand visités par l'algorithme avec entrée $\mathscr{C}_{n,k}$.

Français et logique formelle, modélisation

Exercice 3.10. Traduire les assertions ci-dessous en associant les variables propositionnelles p, q, r aux énoncés suivants : p : *il pleut*; q : *Pierre prend son parapluie*; r : *Pierre est mouillé*.

1. Pierre prend son parapluie quand il pleut.
2. Si Pierre prend son parapluie, Pierre n'est pas mouillé.
3. S'il ne pleut pas, Pierre ne prend pas son parapluie et Pierre n'est pas mouillé.

Montrer que « Pierre n'est pas mouillé » est une consequence logique des trois énoncés précédents.

Exercice 3.11. On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (a et b) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

1. Il y a au moins un bateau sur la ligne b.
2. Il y a au moins un bateau sur la ligne a.
3. Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
4. Il n'y a pas de bateau en $(b,1)$.
5. S'il y a un bateau sur la ligne a, alors il n'y en a pas en $(b,3)$.

En notant x_i l'information « il y a un bateau en position (x,i) » (pour $x \in \{a,b\}$ et $i \in \{1,2,3\}$), modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum l'ensemble des formules obtenues puis dessinez les modèles de cet ensemble.