

TD n° 8

Unification et résolution

FORMES NORMALES

Exercice 8.1 (*Forme prénexe*). Donner une forme prénexe des formules suivantes, en précisant les étapes de calcul :

1. $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x \forall y (\exists z P(x, y, z) \wedge Q(x, y)) \Rightarrow \exists y (\forall x P(x, z, y) \wedge \exists x Q(y, x))$

Exercice 8.2 (*Skolémisation*). Mettre en forme prénexe puis skolémiser les formules :

1. $\neg(\neg\varphi(x) \vee \forall x \psi(x)) \wedge (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \tau(x))$
2. $(\exists x \forall y (\exists z P(x, y, z) \wedge Q(x, y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x, z, y) \wedge \exists x Q(y, x)))$

Exercice 8.3 (*Formes prénexes et clauseales*).

1. Donnez une forme prénexe et ensuite une forme clauseale de la formule suivante, en précisant les étapes de calcul :

$$(\exists x \forall y (\exists z P(x, y, z) \wedge Q(x, y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x, z, y) \wedge \exists x Q(y, x))).$$

2. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clauseale de la formule :

$$\forall x \neg R(x, x) \wedge \exists x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg \exists z R(z, x)) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, x))).$$

UNIFICATION

Exercice 8.4 Soit $\mathcal{S}_f = \{(f, 1), (g, 2), (c, 0)\}$. Calculez le composé des couples de substitutions suivantes :

1. $[g(f(y), c)/x, f(g(x, y))/y]$ et $[g(f(y), c)/y, f(g(x, y))/x]$,
2. $[g(f(y), c)/x, f(g(x, w))/y]$ et $[g(f(y), c)/z, f(g(x, y))/w]$.

Exercice 8.5 Montrez que l'application d'une substitution à un terme obéit les lois suivantes :

$$t[] = t, \quad (t\sigma)\rho = t(\rho \circ \sigma).$$

(Rappelez d'abord la définition de l'application et celle de la composition, puis développez votre preuve par induction sur la structure d'un terme). Argumentez que, par conséquent, les lois suivantes sont satisfaites :

$$\rho \circ [] = \rho = [] \circ \rho, \quad (\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau).$$

Exercice 8.6 Proposez deux unificateurs σ et ρ du problème

$$\pi := (f(g(x), y), f(g(y), h(z))).$$

Le premier, σ , sera un MGU de π ; le deuxième, ρ , ne sera pas un MGU de π .

Exercice 8.7 Appliquez l'algorithme d'unification présenté en cours pour résoudre les problèmes d'unification suivants :

1. $(x + s(y) * s(z), 7 + s(5) * s(s(x)))$;
2. $(x + f(y, 5), g(x) + f(g(x), 5))$;
3. $(f(z, f(y, c)), f(g(w), x))$;
4. $(f(x), y)$, $(g(y), z)$, $(y, f(w))$;
5. $(g(x), g(f(y)))$, $(z, h(y, x))$, (y, z) ;
6. $(f(x), f(g(y)))$, $(x, h(y))$.

Pour chaque instance du problème :

- on décrira d'abord la signature fonctionnelle : lesquels sont les symboles de fonctions et avec quelle arité ils ont utilisés ;
- on éclaircira, étape par étape, le déroulement de l'algorithme.

Exercice 8.8 Argumentez que, si $x \notin \text{Var}(t)$, alors la substitution $[t/x]$ est un MGU du problème (x, t) . Que peut on dire si $x \in \text{Var}(t)$?

FRANÇAIS

Exercice 8.9 Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve au PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve au PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est éloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 8.10 On se propose de traduire de la langue française en logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haïssaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Proposez :

- (a) un langage du premier ordre pour modéliser ces phrases,
- (b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit.