TD n° 6

Premier-Ordre - Sémantique, modélisation

Sémantique

Exercice 6.1 On donne $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{f, a\}$, $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{p\}$ où f unaire, a constante et p binaire et les formules :

$\varphi_1 = \ p(a, f(f(a)))$

$\varphi_2 = \ \forall x\,(p(x,x) \Rightarrow \exists y p(x,y))$

$\varphi_3 = \ \forall x\,(\exists y(p(x,y) \wedge p(y,a)) \Rightarrow \neg p(x,a))$

1. En supposant que le domaine d'interprétation D est l'ensemble des êtres humains, que a est interprétée par *Adèle Dupont*, $f(x)$ est *le père de x*, que $p(x,y)$ signifie *x aime y*, interprétez (en langue française) les trois formules.
2. On considère maintenant la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M} = \langle D, p^{\mathscr{M}}, a^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}} \rangle$, où :
   - $D = \{\text{Alma}, \text{Max}, \text{Dan}\}$
   - $p^{\mathscr{M}} = \{(Alma,Alma),(Alma,Dan),(Max,Alma),(Max,Dan)\}$
   - $a^{\mathscr{M}} = \text{Alma}$
   - $f^{\mathscr{M}}$: $\text{Alma} \mapsto \text{Max}, \text{Max} \mapsto \text{Dan}, \text{Dan} \mapsto \text{Dan}$,

   Les formules φ_1, φ_2, φ_3 sont-elles vraies dans cette interprétation ?

Exercice 6.2 Considérons le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\,(P,1)\,\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \varnothing$.

1. Combien de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ il y a tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$?
2. Même question, en considérant maintenant le langage $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}'_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}'_{\mathtt{f}} = \{\,(c,0)\,\}$.
3. Considérez la formule $\exists x P(x)$. Combien de modèles cette formule possède tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$?
4. Considérez la formule atomique $P(c)$. Combien de modeles cette formule possède tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\,1,\ldots,n\,\}$?

Exercice 6.3 Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire, et un symbole de fonction f unaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \{\,a,b,c,d\,\}, \quad R^{\mathscr{M}} = \{\,(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\,\},$$
$$f^{\mathscr{M}}(a) = c,\ \ f^{\mathscr{M}}(c) = a,\ \ f^{\mathscr{M}}(b) = d,\ \ f^{\mathscr{M}}(d) = b\,.$$

1. Représentez cette structure sous la forme de graphe étiqueté.
2. En regardant le (dessin du) graphe, évaluez les formules suivantes (utilisez votre intuition) :

   $\varphi_1 := \ \forall x \exists y (\,R(x,y) \wedge R(f(y),x)\,)$

   $\varphi_2 := \ \exists x \forall y (\,R(x,y) \vee R(f(y),x)\,)$

   $\varphi_3 := \ \forall x \exists y (\,R(x,y) \Rightarrow \exists z R(f(z),x)\,)$
3. Évaluez ces formules dans $\mathscr{M}$, cette fois ci en utilisant la définition formelle de la fonction dévaluation (appliquez toutes les étapes ! ! !).

Exercice 6.4 Soit $\mathscr{S}$ le langage $(\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ avec $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\,(S,1),(\sqsubseteq,2)\,\}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une minorant de y et z ;
3. x est la borne inférieure (le plus grand minorant) de y et z ;
4. x est la borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

(Vous pouvez écrire $\sqsubseteq(x,y)$ en notation infixe $x \sqsubseteq y$).

Proposez une $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ où $\sqsubseteq^{\mathscr{M}}$ est une relation d'ordre partiel et $S^{\mathscr{M}}$, étant fermé par le bas, n'a pas une borne inférieure.

Exercice 6.5 Soit $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ le langage tel que $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2),(s,2),(t,2)\}$. Ecrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat s contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.

Exercice 6.6 Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve au PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve au PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est eloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 6.7 On se pose la question si les phrases suivantes sont une conséquence logique des phrases de l'Exercice 7.2 :

- Martigues n'est pas plus grande que Marseille.
- Le Havre est éloignée de Marseille.
- Martigues est en France.
- PACA est proche de la mer.

Pour chaque phrase, montrez que ce n'est pas le cas, en trouvant un modèle (des traductions) des phrases de l'Exercice 7.2 qui ne valide pas la (traduction de la phrase).