14/05/2013, 11h15, Amphi Marion
Durée : 2 heures
Documents autorisés

Logique et Calculabilité
Licence 3 Informatique (et Maths)

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Choisissez 4 exercices parmi les 6 exercices proposés. Abordez un 5ème exercice seulement s'il vous reste du temps.

Calcul propositionnel

Exercice 1. Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, énumérez ses modèles :

1. $\phi_1 := (P \vee (Q \Rightarrow P)) \wedge Q \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$;
2. $\phi_2 := (P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)) \vee Q$;
3. $\phi_3 := (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$.

Exercice 2. Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, de l'Exercice 1, proposez une formule ψ_i en forme normale conjonctive équivalente à ϕ_i. Pour la formule ϕ_3, détaillez aussi les étapes de l'algorithme de mise en forme clausale.

Calcul des prédicats

Exercice 3. On considère le langage $\mathcal{S} = (\emptyset, \mathcal{S}_R)$ où

$$\mathcal{S}_R = \{ (Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1) \} .$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous

Exercice 4. Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ donné par

$$\mathcal{S}_F = \{ (f, 2) \} \qquad \mathcal{S}_R = \{ (P, 1), (R, 2) \} ,$$

et la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ suivante :

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{M}} &= \{ 0, 1, 2, 3 \} , \\ f^{\mathcal{M}}(x, y) &= x + y \mod 4 , \\ P^{\mathcal{M}} &= \{ 0, 2 \} , \quad R^{\mathcal{M}} = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0) \} . \end{aligned}$$

Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

1. $\phi_1 := \forall x \exists y P(f(x, y))$;
2. $\phi_2 := \exists y \forall x P(f(x, y))$;
3. $\phi_3 := \forall x (P(x) \vee \exists y (R(x, y) \wedge P(y)))$;
4. $\phi_4 := \forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(f(x, y)))$;
5. $\phi_5 := \exists y \forall x (R(x, f(x, y)) \wedge (P(x) \vee P(f(x, y))))$;

évaluez (dites si est vraie ou non) ϕ_i par rapport à la structure $\mathcal{M}$. Pour la formule ϕ_1 justifiez aussi votre réponse : détaillez *toutes* les étapes nécessaires à évaluer cette formule.

Exercice 5. Considérez la formule suivante :

$$\phi_1 := \exists x(\, P(x) \wedge \forall y((\forall x R(x,y)) \Rightarrow R(y,x))\,)\,.$$

1. Transformez la formule ϕ_1 en une formule ϕ_2 équivalente en forme prenexe.
2. Skolemisez ϕ_2 : transformez la formule ϕ_2 en une formule equisatisfiable ϕ_3, avec ϕ_3 universelle (avec des quantificateurs $\forall$ seulement) et en forme prenexe.
3. Mettez la matrice de ϕ_3 en forme normale conjonctive.
4. Déduisez un ensemble de clauses universelles equisatisfiable avec ϕ_1.

Exercice 6. Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $\phi := \forall x P(x)$ est conséquence logique de l'ensemble des formules $\Gamma = \{\, \forall y Q(y), \forall z(\, Q(z) \Rightarrow P(z)\,)\,\}$.
Pour ce faire :

1. transformez $\Gamma \cup \{\, \neg\phi \,\}$ en un ensemble equisatisfiable Δ de clauses universelles ;
2. déduisez, en utilisez les règles de factorisation et/ou résolution, la clause vide de Δ.