28/06/2013, 8h30, Amphi Marion
Durée : 2 heures
Documents autorisés

Logique et Calculabilité
Licence 3 Informatique (et Maths) — site de Saint-Charles

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Cet examen comporte une large choix d'exercices ; vous devez résoudre 5 exercices de façon correcte pour obtenir la note maximum.

Calcul propositionnel

Exercice 1. Considérez les formules suivantes :

1. $\phi_1 := p \land \neg q$;
2. $\phi_2 := (p \land q) \lor (\neg p \land r)$;
3. $\phi_3 := (p \lor q \land \neg r) \land (\neg p \lor r)$;
4. $\phi_4 := (\neg p \lor q \lor \neg r \lor \neg s) \land (\neg p \lor r) \land (\neg s \lor p) \land p$.

Repondez aux questions suivantes :

Question 1.1 Lesquelles parmi ces formules sont en forme normale conjonctive ? Justifiez votre réponse.

Question 1.2 Si ϕ_i n'est pas en forme normale conjonctive, appliquez l'algorithme pour transformer cette formule dans une formule équivalente en forme normale conjonctive ; détaillez toutes les étapes de l'algorithme.

Question 1.3 Pour $i = 1, 2, 3, 4$, appliquez l'algorithme de DPLL (Davis–Putnam–Logemann–Loveland) pour trouver un modèle de la formule, ou bien pour montrer que cette formule est contradictoire.

Calcul des prédicats

Exercice 2. On se propose de traduire de la langue francaise en logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Question 2.1 Proposez un langage du premier ordre pour modeliser ces phrases.

Question 2.2 Pour chaque phrase en francais, proposez une formule en logique du premier ordre correpondante.

Exercice 3. Considérez la formule suivante :

$$\exists x \forall y(\, R(x, y) \Rightarrow P(x, s(y))\,)$$

Question 3.1 Quel est le langage de cette formule ?

Question 3.2 Construisez un modèle $\mathcal{M}$ de cette formule.

Question 3.3 Construisez une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{N}$ telle $D_{\mathcal{N}} \neq \emptyset$ et $\mathcal{N} \not\models \phi$.
Attention : quand vous proposez une $\mathcal{S}$-structure, prenez garde à soigneusement définir son domaine et, pour tout symbole du langage $\mathcal{S}$, son interprétation.

Exercice 4. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_F)$, où $\mathcal{S}_R = \{\, (R, 2), (S, 1)\,\}$ et $\mathcal{S}_F = \{\, (f, 1)\,\}$, le langage de la formule

$$\phi := \forall x(\, (\exists y R(x, f(y))) \vee (\forall y(R(x, y) \Rightarrow S(y)))\,)\,.$$

Considérez les $\mathcal{S}$-structures suivantes :

1. $D_{\mathcal{M}_1} := \{\, a, b\,\}$, $R^{\mathcal{M}_1} := \emptyset$, $S^{\mathcal{M}_1} := \{\, a\,\}$, $f^{\mathcal{M}_1}(a) := a$ et $f^{\mathcal{M}_1}(b) := b$.
2. $D_{\mathcal{M}_2} := \{\, a, b\,\}$, $R^{\mathcal{M}_2} := \{\, (a, b)\,\}$, $S^{\mathcal{M}_2} := \{\, a\,\}$, $f^{\mathcal{M}_2}(a) := a$ et $f^{\mathcal{M}_2}(b) := a$;
3. $D_{\mathcal{M}_3} := \mathcal{N}$ (les nombres entiers non-négatifs), $R^{\mathcal{M}_3} := \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_3} := \emptyset$, $f^{\mathcal{M}_3}(x) := x + 1$;
4. $D_{\mathcal{M}_4} := \mathcal{N}$, $R^{\mathcal{M}_4} := \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_4} := \{\, 1\,\}$, $f^{\mathcal{M}_4}(x) := x + 2$;
5. $D_{\mathcal{M}_5} := \mathcal{N}$, $R^{\mathcal{M}_5} := \{\, (x+1, x) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_5} := \{\, 1\,\}$, $f^{\mathcal{M}_5}(x) := x + 1$.

Pour chaque $i = 1, \ldots, 5$, dites si la relation $\mathcal{M}_i \models \phi$ est vraie ou non. Justifiez votre réponse.

Exercice 5. Considérez la formule suivante (la même que celle de l'exercice précédent) :

$$\phi := \forall x(\, (\exists y R(x, f(y))) \vee (\forall y(R(x, y) \Rightarrow S(y)))\,).$$

Question 5.1 Transformez la formule ϕ en une formule ϕ_2 équivalente en forme prenexe.

Question 5.2 Skolemisez ϕ_2 : transformez la formule ϕ_2 en une formule equisatisfiable ϕ_3, avec ϕ_3 universelle (avec des quantificateurs $\forall$ seulement) et en forme prenexe.

Question 5.3 Mettez la matrice de ϕ_3 en forme normale conjonctive.

Question 5.4 Déduisez un ensemble de clauses universelles equisatisfiable avec ϕ.

Exercice 6. Considérez les problèmes d'unification suivants (la signature étant $\{\, (c, 0), (f, 1), (g, 2)\,\}$) :

1. $(\, g(x, g(f(c), g(y, x)))\,, g(f(c), g(f(c), z))\,)$;
2. $(\, g(x, c)\,, g(f(y), c)\,)\,,\ (\, z\,, g(c, x)\,)\,,\ (\, y\,, z\,)$.

Pour chacun de ces problèmes, exécutez l'algorithme `UNIFIER` pour trouver un unificateur principal du problème ou bien montrer qu'un tel unificateur n'existe pas. Détaillez toutes les étapes de l'algorithme.

Exercice 7. Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $\phi := \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ est conséquence logique de l'ensemble des formules $\Gamma = \{\, \forall y(P(y) \Rightarrow Q(y)), \forall z(\, Q(z) \Rightarrow R(z)\,)\,\}$.
Pour ce faire :

1. transformez $\Gamma \cup \{\, \neg\phi\,\}$ en un ensemble equisatisfiable Δ de clauses universelles ;
2. déduisez, en utilisez les règles de factorisation et/ou résolution, la clause vide de Δ.