

TD n° 5**Calcul Propositionnel - Algorithmes**

Exercice 5.1 (*Algorithme de Quine*). Transformez la formule suivante :

$$\varphi = (p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \Leftrightarrow (r \wedge (p \vee s)))$$

en forme normale conjonctive et appliquez ensuite l'algorithme de Quine pour trouver tous les modèles de φ .

Exercice 5.2 Dans l'explication de l'algorithme DPLL, on mentionne l'heuristique suivante pour sélectionner un littéral à remplacer par $\perp$:

choisir un littéral apparaissant dans les clauses les plus courtes.

C'est à dire : on essaie de produire des littéraux isolés (qui n'entraînent pas de branchement) aussitôt que possible. Pour pouvoir implémenter cette heuristique, nous devons préciser comment opérer une telle choix. Proposez donc une formule mathématique définissant une fonction rank, qui associe à chaque littéral un entier, de façon que le littéral qui maximise cette fonction sera choisi.

Exercice 5.3 (*Algorithme DPLL*). Transformez la formule suivante :

$$\varphi = \neg[(x \Rightarrow w) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow (w \wedge y \wedge z \wedge \neg x)))]$$

en FNC et appliquez ensuite l'algorithme de DPLL pour trouver un modèle ou réfuter cette formule. Répétez l'exercice avec la formule de l'exercice 5.1.

Exercice 5.4 Utiliser la méthode de résolution pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q)).$
8. $\models (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q)).$
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r.$
10. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$

PREMIÈRES EXPÉRIENCES AVEC LE CALCUL DES PREDICATS (SYNTAXE)

Exercice 5.5 Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ où

$$\mathcal{S}_F = \{(c, 0), (f, 1), (g, 2)\}, \quad \mathcal{S}_R = \{(P, 1), (Q, 2), (R, 3)\}$$

et les expressions suivantes :

1. $g(f(0), g(x, f(f(y))))$,
2. $g(f(0), f(0, f(0)))$,
3. $Q(f(x), P(y))$,
4. $R(f(0), f(f(0)), y)$,
5. $P(f(x)) \wedge \exists y(Q(y, x) \Rightarrow R(y, x, f(x)))$,
6. $P(f(x)) \vee R(g(x, y), f(z), y)$,
7. $\forall x \exists y g(x, f(y))$,
8. $\exists y \forall x Q(g(x), f(y, g(0)))$,
9. $\forall x \exists y \forall z (Q(x, f(y), g(0, z)) \vee P(x))$.

Classez chaque expression dans une des catégories suivantes : terme appartenant à $T_{\mathcal{S}_F}[X]$, formule appartenant à $\mathcal{F}_{\text{po}}(\mathcal{S})$, formule atomique appartenant à $\mathcal{F}_{\text{po}}(\mathcal{S})$, aucun des précédents. Si une expression peut se classer, dessinez son arbre syntaxique. Sinon expliquez pourquoi l'expression ne peut pas se classer.

Exercice 5.6 Pour chacune des signatures $\mathcal{S}_F$ suivantes, donnez plusieurs éléments de l'ensemble $T_{\mathcal{S}_F}[X]$ des termes définis sur $\mathcal{S}_F$.

1. $\mathcal{S}_F = \{(s, 1)\}$;
2. $\mathcal{S}_F = \{(f, 2)\}$;
3. $\mathcal{S}_F = \{(f, 2), (s, 1), (c, 0)\}$.

Exercice 5.7 On considère le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ où $\mathcal{S}_F = \{(c, 0), (f, 1), (g, 2)\}$ et $\mathcal{S}_R = \{(r, 2), (p, 1), (q, 3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 5.8 On considère l'ensemble de variables $X = \{x, y, z\}$ et les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\forall x \exists z f(x, z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x, y, z)) \\ \varphi_2 &= (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x)) \\ \varphi_3 &= \forall x ((\exists x g(f(x), a) \vee h(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y))) \end{aligned}$$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. donnez le langage (i.e. le couple des signatures $\mathcal{S}_F$ et $\mathcal{S}_R$) sur laquelle la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.