TD : Sémantique, induction

Sémantique opérationnelle

Exercice 1. Prouver que :
- pour tout $a \in \mathcal{A}exp$ et $\sigma \in \mathcal{S}$ il existe un seul $n \in \mathcal{N}$ tel que $(a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp}$,
- pour tout $b \in \mathcal{B}exp$ et $\sigma \in \mathcal{S}$ il existe un seul $v \in \{0, 1\}$ tel que $(b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v$,
- pour tout $c \in \mathcal{C}om$ et $\sigma \in \mathcal{S}$ il existe au plus un $\sigma' \in \mathcal{S}$ tel que $(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$.

Exercice 2. Proposer un commande $c \in \mathcal{C}om$ avec la propriété suivante : pour tout état σ il n'existe aucun état σ' tel que $(c, \sigma) \rightarrow \sigma'$. Démontrer formellement que le commande proposé possède cette propriété.

Exercice 3. Dans le langage OCaml, définir deux types pour représenter les expressions arithmétiques et les états du langage IML. A partir de la sémantique structurelle opérationnelle de ce langage, définir une fonction que, étant donnée une expression arithmétique a et un état σ, calcule le seul $n \in \mathcal{N}$ tel que $(a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n$.

Induction

Exercice 4. Un jeu fini est un tuplet (V, E, v_0, ϵ), où (V, E) est un graphe acyclique fini de positions et mouvements, v_0 est un sommet/position de départ, et la fonction $\epsilon : V \longrightarrow \{A, E\}$ associe à chaque position le joueur qui doit jouer.
Démontrer – ... par induction sur ? ? ? – que pour chaque position ou bien le jouer A a une stratégie gagnante, ou bien le joueur E a une stratégie gagnante.

Exercice 5. Soit $(G, \rightarrow)$ un graphe dirigé, possiblement infini. On définit un ensemble de règles R sur G de cette façon : X/y ssi $X = S(y) = \{\, x \mid y \rightarrow x \,\}$.
- Montrer que l'opérateur f_R associé à R est :

$$f_R(Z) = \Box Z \;=\; \{\, y \mid \forall x\, y \rightarrow x \text{ implique } x \in Z \,\}\,.$$

- Donner un exemple d'un graphe $(G, \rightarrow)$ où la propriété

$$f_R\Big(\bigcup_{n \geq 0} f_R^n(\emptyset)\Big) = \bigcup_{n \geq 0} f_R^n(\emptyset)$$

  n'est pas vraie.
- Dans un tel graphe, existe-t'il un point fixe de l'opérateur f_R ?

Exercice 6. Soient $f : P(A) \longrightarrow P(B)$ et $g : P(B) \longrightarrow P(A)$ deux fonctions monotones. On assume qu'un plus petit point fixe de $g \circ f$, noté $fix(g \circ f)$, et un plus petit point fixe de $f \circ f$, noté $fix(f \circ g)$, existent. Montrer que :

$$f(\,fix(g \circ f)\,) = fix(f \circ g)\,.$$

On pourra se servir des axiomes suivants :

$$h(fix(h)) \leq fix(h)$$
$$h(y) \leq y \quad \rightarrow fix(h) \leq y\,.$$

Sémantique dénotationnelle du langage IML

Exercice 7. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de états. Rappelons la définition de l'opérateur

$$\Gamma : P(\Sigma \times \Sigma) \longrightarrow P(\Sigma \times \Sigma)\,.$$

par lequel on definit la semantique d'un commande *while* (b) *do* c. On a

$$\Gamma(X) \;= \{\, (\sigma, \sigma') \mid \sigma\beta 1 \text{ et } (\sigma, \sigma') \in X \circ \gamma \,\} \cup \{\, (\sigma, \sigma) \mid \sigma\beta 0 \,\}\,,$$

où $\beta = \|\, b \,\|_{\mathcal{B}exp}$ et $\gamma = \|\, c \,\|_{\mathcal{C}om}$.

1. Montrer que $\Gamma = f_R$ pour un ensemble R de règles sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.
2. En déduire que Γ est monotone et que $fix(\Gamma)$, le plus petit point préfixe de Γ existe.
3. Prouver, par induction sur les règles, que si γ est une fonction partielle alors $fix(\Gamma)$ est une fonction partielle.