

Sémantique

Luigi Santocanale

Laboratoire d'Informatique Fondamentale,
Centre de Mathématiques et Informatique,
39, rue Joliot-Curie - F-13453 Marseille

Plan

- 1 Le langage IML
- 2 Sémantique opérationnelle
- 3 Applications de la sémantique opérationnelle

Ensembles syntaxiques

$\mathcal{N}const$: les constantes numériques :

$$\mathcal{N}const := \hat{0}, \dots, \hat{n}, \dots$$

$\mathcal{B}const$: les constantes booléennes:

$$\mathcal{B}const := true, false,$$

$\mathcal{L}oc$: les locations (identificateurs) :

$$\mathcal{L}oc := [a - zA - Z][a - zA - Z0 - 9]^*$$

$\mathcal{A}exp$: les expressions arithmétiques,

$\mathcal{B}exp$: les expressions booléennes,

$\mathcal{C}om$: les commandes.

Ensembles syntaxiques (II)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}exp &:= \mathcal{N}const \mid \mathcal{L}oc \\ &\mid \mathcal{A}exp + \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp - \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp * \mathcal{A}exp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}exp &:= \mathcal{B}const \\ &\mid not \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp or \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp and \mathcal{B}exp \\ &\mid \mathcal{A}exp \leq \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp = \mathcal{A}exp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}om &:= skip \mid \mathcal{C}om ; \mathcal{C}om \\ &\mid \mathcal{L}oc := \mathcal{A}exp \\ &\mid if(\mathcal{B}exp) then \mathcal{C}om else \mathcal{C}om \\ &\mid while(\mathcal{B}exp) do \mathcal{C}om \end{aligned}$$

La notion d'état

Fonction associant un valeur entier positif à chaque location :

$$\sigma : \mathcal{Loc} \longrightarrow \mathcal{N}$$

L'ensemble des états :

$$\mathcal{S} := \{ \sigma \mid \sigma : \mathcal{Loc} \longrightarrow \mathcal{N} \}.$$

Sémantique opérationnelle structurale

Exemple :

on veut définir une relation

$$(a, \sigma) \rightarrow n$$

à lire :

l'expression a , dans l'état σ , s'évalue à l'entier positif n .

opérationnelle : on peut traduire la sémantique en algorithme pour décider si $(a, \sigma) \rightarrow n$,

structurale : dirigé par la syntaxe.

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \rightarrow n} \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \rightarrow \sigma(X)} X \in \mathcal{Loc}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \rightarrow n} \text{ et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \rightarrow n} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \rightarrow n} \text{ et } n = n_0 n_1$$

Définition de la relation $\rightarrow_{\mathcal{A}exp}$

Definition

Posons $(a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n$ ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par $(a, \sigma) \rightarrow n$.

Exemple : supposons que $\sigma(\mathit{init}) = 0$, montrons que

$$((\mathit{init} + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21 :$$

$$\frac{\frac{\frac{}{(\mathit{init}, \sigma) \rightarrow 0} \quad \frac{}{(\hat{5}, \sigma) \rightarrow 5}}{(\mathit{init} + \hat{5}, \sigma) \rightarrow 5} \quad \frac{\frac{}{(\hat{7}, \sigma) \rightarrow 7} \quad \frac{}{(\hat{9}, \sigma) \rightarrow 9}}{(\hat{7} + \hat{9}, \sigma) \rightarrow 16}}{((\mathit{init} + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21}}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \rightarrow 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \rightarrow 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \rightarrow 1} \text{ et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \rightarrow 0} \text{ et } n_0 \neq n_1$$

$$\dots$$

$$\frac{}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \rightarrow 1} \quad \frac{}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \rightarrow 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes (II)

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 0}{(not\ b, \sigma) \rightarrow 1}$$

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 1}{(not\ b, \sigma) \rightarrow 0}$$

$$\frac{(b_0, \sigma) \rightarrow v_0 \quad (b_1, \sigma) \rightarrow v_1}{(b_0\ and\ b_1, \sigma) \rightarrow v} \text{ et } v = \min(v_0, v_1)$$

$$\frac{(b_0, \sigma) \rightarrow v_0 \quad (b_1, \sigma) \rightarrow v_1}{(b_0\ or\ b_1, \sigma) \rightarrow v} \text{ et } v = \max(v_0, v_1)$$

Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état σ , alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état σ' .

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Règles de déduction pour les commandes

$$\frac{}{(skip, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{(c_0, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma} \quad (c_1, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}{(c_0; c_1, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

$$\frac{(a, \sigma) \rightarrow m}{(X := a, \sigma) \rightarrow \sigma[m/X]}$$

Règles de déduction pour les commandes (II)

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 1 \quad (c_0, \sigma) \rightarrow \sigma'}{(if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 0 \quad (c_1, \sigma) \rightarrow \sigma'}{(if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 0}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{(b, \sigma) \rightarrow 1 \quad (c, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma} \quad (while\ b\ do\ c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$



Les relations \rightarrow

Definition

Posons

$$(b, \sigma) \rightarrow_{Bexp} v$$

$$(c, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$$

ssi il est possible de construire, à l'aide de telles règles, un arbre de dérivation dont la racine est étiquetée par

$$(b, \sigma) \rightarrow v$$

$$(c, \sigma) \rightarrow \sigma'$$



Équivalences

Definition

$$a \sim_{Aexp} a' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N} \\ (a, \sigma) \rightarrow_{Aexp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \rightarrow_{Aexp} n$$

$$b \sim_{Bexp} b' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\} \\ (b, \sigma) \rightarrow_{Bexp} v \text{ ssi } (b', \sigma) \rightarrow_{Bexp} v$$

$$c \sim_{Com} c' \text{ ssi } \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S} \\ (c, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$$



Un exemple étendu

Soit

$$p_0 = while\ b\ do\ c$$

$$p_1 = if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip$$

On a

$$p_0 \sim_{Com} p_1$$

c.-à-d.

$$(p_0, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma' \text{ ssi } (p_1, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$$

pour toute couple d'états σ, σ' .



Si $(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$:

Ou bien $\sigma' = \sigma$ et

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \quad \frac{}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

et donc

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \quad \frac{}{(skip, \sigma) \rightarrow \sigma}}{(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$:

Sinon :

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 1} \quad \frac{\vdots}{(c, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \frac{\vdots}{(while\ b\ do\ c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 1} \quad \frac{\vdots}{(c, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \frac{\vdots}{(p_0, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

Si $(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$:

Ou bien

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \quad \frac{}{(skip, \sigma) \rightarrow \sigma'}}{(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc $\sigma' = \sigma$ et

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \quad \frac{}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow_{Com} \sigma'$:

Sinon :

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 1} \quad \frac{\vdots}{(c, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \frac{\vdots}{(p_0, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(if\ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc

$$\frac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 1} \quad \frac{\vdots}{(c, \sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \frac{\vdots}{(while\ b\ do\ c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$