Sémantique

Luigi Santocanale

Laboratoire d'Informatique Fondamentale,
Centre de Mathématiques et Informatique,
39, rue Joliot-Curie - F-13453 Marseille

Plan

Ensembles syntaxiques

$\mathcal{N}const$: les constantes numériques :

$$\mathcal{N}const := \hat{0}, \ldots \hat{n}, \ldots$$

$\mathcal{B}const$: les constantes booléennes:

$$\mathcal{B}const := true, false,$$

$\mathcal{L}oc$: les locations (identificateurs) :

$$\mathcal{L}oc := [a - zA - Z][a - zA - Z0 - 9]*$$

$\mathcal{A}exp$: les expressions arithmétiques,

$\mathcal{B}exp$: les expressions booléennes,

$\mathcal{C}om$: les commandes.

Ensembles syntaxiques (II)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}exp := {} & \mathcal{N}const \mid \mathcal{L}oc \\
& \mid \mathcal{A}exp \ + \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ - \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ * \ \mathcal{A}exp
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}exp := {} & \mathcal{B}const \\
& \mid not\ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp\ or\ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp\ and\ \mathcal{B}exp \\
& \mid \mathcal{A}exp \ <= \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ = \ \mathcal{A}exp
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}om := {} & skip \mid \mathcal{C}om \ ; \ \mathcal{C}om \\
& \mid \mathcal{L}oc := \mathcal{A}exp \\
& \mid if (\ \mathcal{B}exp\ )\ then\ \mathcal{C}om\ else\ \mathcal{C}om \\
& \mid while (\ \mathcal{B}exp\ )\ do\ \mathcal{C}om
\end{aligned}
$$

Ensembles syntaxiques (II)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}exp := {} & \mathcal{N}const \mid \mathcal{L}oc \\ & \mid \mathcal{A}exp \; + \; \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \; - \; \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \; * \; \mathcal{A}exp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}exp := {} & \mathcal{B}const \\ & \mid not\ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp\ or\ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp\ and\ \mathcal{B}exp \\ & \mid \mathcal{A}exp \; <= \; \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \; = \; \mathcal{A}exp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}om := {} & skip \mid \mathcal{C}om \; ; \; \mathcal{C}om \\ & \mid \mathcal{L}oc := \mathcal{A}exp \\ & \mid if(\ \mathcal{B}exp\ )\ then\ \mathcal{C}om\ else\ \mathcal{C}om \\ & \mid while(\ \mathcal{B}exp\ )\ do\ \mathcal{C}om\end{aligned}$$

Ensembles syntaxiques (II)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}exp := & \ \mathcal{N}const \mid \mathcal{L}oc \\ & \mid \mathcal{A}exp \ + \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ - \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ * \ \mathcal{A}exp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}exp := & \ \mathcal{B}const \\ & \mid not \ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp \ or \ \mathcal{B}exp \mid \mathcal{B}exp \ and \ \mathcal{B}exp \\ & \mid \mathcal{A}exp \ <= \ \mathcal{A}exp \mid \mathcal{A}exp \ = \ \mathcal{A}exp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}om := & \ skip \mid \mathcal{C}om \ ; \ \mathcal{C}om \\ & \mid \mathcal{L}oc := \mathcal{A}exp \\ & \mid if (\ \mathcal{B}exp \ ) \ then \ \mathcal{C}om \ else \ \mathcal{C}om \\ & \mid while(\ \mathcal{B}exp \ ) \ do \ \mathcal{C}om\end{aligned}$$

La notion d'état

Fonction associant un valeur entier positif à chaque location :

$$\sigma : \mathcal{L}oc \longrightarrow \mathcal{N}$$

L'ensemble des états :

$$\mathcal{S} := \{\, \sigma \mid \sigma : \mathcal{L}oc \longrightarrow \mathcal{N} \,\}\,.$$

Sémantique opérationnelle structurelle

Exemple :
on veut définir une relation

$$(a, \sigma) \longrightarrow n$$

à lire :

l'expression a, dans l'état σ, s'évalue à l'entier positif n.

opérationnelle : on peut traduire la sémantique en algorithme pour décider si $(a, \sigma) \longrightarrow n$,

structurelle : dirigé par la syntaxe.

Sémantique opérationnelle structurelle

Exemple :
on veut définir une relation

$$(a, \sigma) \longrightarrow n$$

à lire :

l'expression a, dans l'état σ, s'évalue à l'entier positif n.

opérationnelle : on peut traduire la sémantique en algorithme pour décider si $(a, \sigma) \longrightarrow n$,

structurelle : dirigé par la syntaxe.

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \longrightarrow n} \ \hat{n} \in \mathcal{N} const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \longrightarrow \sigma(X)} \ X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \longrightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \longrightarrow n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \longrightarrow n} \ \text{et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \longrightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \longrightarrow n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \longrightarrow n} \ \text{et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \longrightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \longrightarrow n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \longrightarrow n} \ \text{et } n = n_0 n_1$$

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \to n}\ \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \to \sigma(X)}\ X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 n_1$$

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \to n}\ \hat{n} \in \mathcal{N} const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \to \sigma(X)}\ X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \to n}\ \text{et } n = n_0 n_1$$

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \to n} \; \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \to \sigma(X)} \; X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \to n} \; \text{et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \to n} \; \text{et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \to n} \; \text{et } n = n_0 n_1$$

Règles de déduction pour les expressions arithmétiques

$$\frac{}{(\hat{n}, \sigma) \rightarrow n} \; \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{}{(X, \sigma) \rightarrow \sigma(X)} \; X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 + a_1, \sigma) \rightarrow n} \; \text{et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 - a_1, \sigma) \rightarrow n} \; \text{et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \quad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 * a_1, \sigma) \rightarrow n} \; \text{et } n = n_0 n_1$$

Définition de la relation $\longrightarrow_{\mathcal{A}exp}$

Definition

Posons $(a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n$ ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par $(a, \sigma) \rightarrow n$.

Exemple : supposons que $\sigma(init) = 0$, montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21 :$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(init, \sigma) \rightarrow 0} \quad \dfrac{}{(\hat{5}, \sigma) \rightarrow 5}}{(init + \hat{5}, \sigma) \rightarrow 5} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\hat{7}, \sigma) \rightarrow 7} \quad \dfrac{}{(\hat{9}, \sigma) \rightarrow 9}}{(\hat{7} + \hat{9}, \sigma) \rightarrow 16}}{((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21}$$

Définition de la relation $\longrightarrow_{\mathcal{A}exp}$

Definition

Posons $(a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n$ ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par $(a, \sigma) \rightarrow n$.

Exemple : supposons que $\sigma(init) = 0$, montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21 :$$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{(init, \sigma) \rightarrow 0} \quad \overline{(\hat{5}, \sigma) \rightarrow 5}}{(init + \hat{5}, \sigma) \rightarrow 5} \quad \dfrac{\overline{(\hat{7}, \sigma) \rightarrow 7} \quad \overline{(\hat{9}, \sigma) \rightarrow 9}}{(\hat{7} + \hat{9}, \sigma) \rightarrow 16}}{((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21}$$

Définition de la relation $\longrightarrow_{\mathcal{A}exp}$

Definition

Posons $(a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n$ ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par $(a, \sigma) \rightarrow n$.

Exemple : supposons que $\sigma(init) = 0$, montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21 :$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(init, \sigma) \rightarrow 0} \quad \dfrac{}{(\hat{5}, \sigma) \rightarrow 5}}{(init + \hat{5}, \sigma) \rightarrow 5} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\hat{7}, \sigma) \rightarrow 7} \quad \dfrac{}{(\hat{9}, \sigma) \rightarrow 9}}{(\hat{7} + \hat{9}, \sigma) \rightarrow 16}}{((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \to 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \to 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 1} \quad \text{et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 0} \quad \text{et } n_0 \neq n_1$$

$$\frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 1} \qquad \frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \to 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \to 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 1} \text{ et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 0} \text{ et } n_0 \neq n_1$$

$$\frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 1} \qquad \frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \rightarrow 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \rightarrow 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \qquad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \rightarrow 1} \text{ et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \rightarrow n_0 \qquad (a_1, \sigma) \rightarrow n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \rightarrow 0} \text{ et } n_0 \neq n_1$$

$$\frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \rightarrow 1} \qquad \frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \rightarrow 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \to 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \to 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 1} \text{ et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 0} \text{ et } n_0 \neq n_1$$

$$\frac{\cdots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 1} \qquad \frac{\cdots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes

$$\frac{}{(true, \sigma) \to 1}$$

$$\frac{}{(false, \sigma) \to 0}$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 1} \text{ et } n_0 = n_1$$

$$\frac{(a_0, \sigma) \to n_0 \quad (a_1, \sigma) \to n_1}{(a_0 = a_1, \sigma) \to 0} \text{ et } n_0 \neq n_1$$

$$\frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 1} \quad \frac{\ldots}{(a_0 \leq a_1, \sigma) \to 0}$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \longrightarrow 0}{(not\ b,\sigma) \longrightarrow 1}$$

$$\frac{(b,\sigma) \longrightarrow 1}{(not\ b,\sigma) \longrightarrow 0}$$

$$\frac{(b_0,\sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ and\ b_1,\sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et } v = min(v_0, v_1)$$

$$\frac{(b_0,\sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ or\ b_1,\sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et } v = max(v_0, v_1)$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \longrightarrow 0}{(not\ \ b,\sigma) \longrightarrow 1}$$

$$\frac{(b,\sigma) \longrightarrow 1}{(not\ \ b,\sigma) \longrightarrow 0}$$

$$\frac{(b_0,\sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ \ and\ \ b_1,\sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et} \quad v = min(v_0, v_1)$$

$$\frac{(b_0,\sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ \ or\ \ b_1,\sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et} \quad v = max(v_0, v_1)$$

Règles de déduction pour les expressions booléennes (II)

$$\frac{(b, \sigma) \longrightarrow 0}{(not\ \ b, \sigma) \longrightarrow 1}$$

$$\frac{(b, \sigma) \longrightarrow 1}{(not\ \ b, \sigma) \longrightarrow 0}$$

$$\frac{(b_0, \sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1, \sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ \ and\ \ b_1, \sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et} \ \ v = min(v_0, v_1)$$

$$\frac{(b_0, \sigma) \longrightarrow v_0 \qquad (b_1, \sigma) \longrightarrow v_1}{(b_0\ \ or\ \ b_1, \sigma) \longrightarrow v} \quad \text{et} \ \ v = max(v_0, v_1)$$

Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état σ, alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état σ'.

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m\,, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état σ, alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état σ'.

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m\,, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état σ, alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état σ'.

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m\,, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Règles de déduction pour les commandes

$$\frac{}{(skip, \sigma) \longrightarrow \sigma}$$

$$\frac{(c_0, \sigma) \longrightarrow \tilde{\sigma} \quad (c_1, \tilde{\sigma}) \longrightarrow \sigma'}{(c_0; c_1, \sigma) \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{(a, \sigma) \longrightarrow m}{(X := a, \sigma) \longrightarrow \sigma[m/X]}$$

Règles de déduction pour les commandes

$$\frac{}{(skip, \sigma) \longrightarrow \sigma}$$

$$\frac{(c_0, \sigma) \longrightarrow \tilde{\sigma} \quad (c_1, \tilde{\sigma}) \longrightarrow \sigma'}{(c_0; c_1, \sigma) \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{(a, \sigma) \longrightarrow m}{(X := a, \sigma) \longrightarrow \sigma[m/X]}$$

Règles de déduction pour les commandes

$$\frac{}{(skip, \sigma) \to \sigma}$$

$$\frac{(c_0, \sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (c_1, \tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(c_0; c_1, \sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(a, \sigma) \to m}{(X := a, \sigma) \to \sigma[m/X]}$$

Règles de déduction pour les commandes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c_0,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0 \quad (c_1,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \to \sigma}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \to \sigma'}$$

Règles de déduction pour les commandes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \qquad (c_0,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0 \qquad (c_1,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \qquad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \qquad (\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma'}$$

Règles de déduction pour les commandes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \qquad (c_0,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0 \qquad (c_1,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \qquad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \qquad (\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma'}$$

Règles de déduction pour les commandes (II)

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c_0,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0 \quad (c_1,\sigma) \to \sigma'}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1,\sigma) \to \sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 0}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c,\sigma) \to \sigma'}$$

Les relations $\longrightarrow$

Definition

Posons

$$(b,\sigma) \longrightarrow_{\mathcal{B}exp} v \qquad\qquad (c,\sigma) \longrightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

ssi il est possible de construire, à l'aide de telles règles, une arbre de dérivation dont la racine est étiquetée par

$$(b,\sigma) \rightarrow v \qquad\qquad (c,\sigma) \rightarrow \sigma'$$

Équivalences

Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N} \quad (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n$$

$$b \sim_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\} \quad (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \text{ ssi } (v', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \quad \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S} \quad (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

Équivalences

Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N} \quad (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n$$

$$b \sim_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\} \quad (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \text{ ssi } (v', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \quad \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S} \quad (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

Équivalences

Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N}$$
$$(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$$

$$b \sim_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\}$$
$$(b, \sigma) \to_{\mathcal{B}exp} v \text{ ssi } (v', \sigma) \to_{\mathcal{B}exp} v$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$$
$$(c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

Un exemple étendu

Soit

$$p_0 = \textit{while } b \textit{ do } c$$
$$p_1 = \textit{if } b \textit{ then } c; p_0 \textit{ else skip}$$

On a

$$p_0 \sim_{\mathcal{C}om} p_1$$

c.-à-d.

$$(p_0, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (p_1, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

pour toute couple d'états σ, σ'.

Si $(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Ou bien $\sigma' = \sigma$ et

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0}}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \qquad \dfrac{}{(skip, \sigma) \rightarrow \sigma}}{(if\ \ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Ou bien $\sigma' = \sigma$ et

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0}}{(while\ b\ do\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b, \sigma) \rightarrow 0} \qquad \dfrac{}{(skip, \sigma) \rightarrow \sigma}}{(if\ \ b\ then\ c; p_0\ else\ skip, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Sinon :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(c; p_0, \sigma) \rightarrow \sigma}}{(\textit{if } b \textit{ then } c; p_0 \textit{ else skip}, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

Si $(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Sinon :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(c; p_0, \sigma) \rightarrow \sigma}}{(\textit{if } \; b \textit{ then } c; p_0 \textit{ else skip}, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

Si $(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Ou bien

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 0} \qquad \dfrac{}{(\mathit{skip},\sigma) \rightarrow \sigma'}}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc $\sigma' = \sigma$ et

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 0}}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Ou bien

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 0} \qquad \dfrac{}{(\mathit{skip},\sigma) \rightarrow \sigma'}}{(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc $\sigma' = \sigma$ et

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 0}}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \rightarrow \sigma}$$

Si $(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Sinon :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(c; p_0,\sigma) \rightarrow \sigma}}{(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \rightarrow 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \rightarrow \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \tilde{\sigma}) \rightarrow \sigma'}}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \rightarrow \sigma'}$$

Si $(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Sinon :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma}}{(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \to \sigma'}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \to \sigma'}$$

Si $(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$:

Sinon :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma}}{(\mathit{if}\ \ b\ \mathit{then}\ c; p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip}, \sigma) \to \sigma'}$$

et donc

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(\mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c, \sigma) \to \sigma'}$$