

Examen partiel

Typage

Exercice 1. Les définitions suivantes produisent des erreurs de type :

```
1 let binome x y =
2   let
3     rec fact = fonction n ->
4       if n <= 0. then 1. else n *. fact (n -. 1.)
5   in
6     fact x / (fact y *. fact (x -. y)) ;;

8 let rec somme_bornee (x,y) f acc =
9   if x > y then acc else
10  somme_bornee x (y-1) f (acc + f y);;

12 let rec map f = fonction
13   [] -> ""
14   | t::q -> (f t)^(map f);;
```

Pour chacun des noms définis (`binome`, `somme_bornee`, `map`)

- expliquer pour quelle raison l'erreur de type se produit,
- corriger la définition, de façon qu'un erreur de type ne se produise pas,
- après correction, en calculer le type.

Solution. On laisse Ocaml nous expliquer les erreurs de type qui se produisent :

```
# let binome x y =
  let
    rec fact = fonction n ->
      if n < 0. then 1. else n *. fact (n -. 1.)
    in
    fact x / (fact y *. fact (x -. y));;
  Characters 113-119:
    fact x / (fact y *. fact (x -. y));;
    ~~~~~
```

This expression has type float but is here used with type int

```
# let rec somme_bornee (x,y) f acc =
  if x > y then acc else
  somme_bornee x (y-1) f (acc + f y);;
  Characters 77-78:
    somme_bornee x (y-1) f (acc + f y);;
    ^
```

This expression has type 'a but is here used with type 'a * 'a

```
# let rec map f = fonction
  [] -> ""
  | t::q -> (f t)^(map f);;
  Characters 56-63:
  | t::q -> (f t)^(map f);;
  ~~~~~
```

This expression has type 'a list -> string but is here used with type string

On peut corriger comme il suit, en laissant Ocaml calculer les types :

```
# let binome x y =
  let
    rec fact = function n ->
      if n < 0. then 1. else n *. fact (n -. 1.)
  in
    fact x /. (fact y *. fact (x -. y));;
  val binome : float -> float -> float = <fun>
# let rec somme_bornee (x,y) f acc =
  if x > y then acc else
    somme_bornee (x,(y-1)) f (acc + f y);;
  val somme_bornee : int * int -> (int -> int) -> int -> int = <fun>
# let rec map f = function
  [] -> ""
  | t::q -> (f t)^(map f q);;
  val map : ('a -> string) -> 'a list -> string = <fun>
```

□

Évaluation

Exercice 2.

- Expliquer ce que veut dire que une expression du langage Ocaml est un valeur.

Solution. Une expression est un valeur quand elle ne peut pas être ultérieurement évaluée. □

- Expliquer quand une expression fonctionnelle (c.-à-d. de type 'a -> 'b où 'a et 'b peuvent être remplacés par des autres types) est un valeur.

Solution. Un expression fonctionnelle est un valeur quand son opérateur principal est un `fun` ou un `function` (ou abstraction). Par exemple

```
(fun x -> x + 1) : int -> int
```

est un valeur,

```
(fun y -> fun x -> x + y) 1 : int -> int
```

n'est pas un valeur. Dans ce deuxième cas, l'opérateur principal est une application : on peut donc appliquer la β -réduction. □

- Que se passe-t'il à la définition des noms `expr1` et `expr2` :

```
let expr1 = print_endline "1"; 2;;
let expr2 () = print_endline "1"; 2;;
```

Solution. L'évaluation donne

```
# let expr1 = print_endline "1"; 2;;
1
val expr1 : int = 2
# let expr2 () = print_endline "1"; 2;;
val expr2 : unit -> int = <fun>
```

On observe que `expr2` est une fonction car sa définition est équivalente à

```
let expr2 = fun () -> print_endline "1";2;;
```

Dans cette définition, l'expression `print_endline "1"` (de type `unit`) n'est pas évaluée car elle se trouve sous un `fun`. Elle ne produit donc pas des effets de bord. □

Exercice 3. Donner les étapes de l'évaluation par valeur ET de l'évaluation par nom de l'expression suivante :

```
(fun x -> fun y -> x)
2
( (fun f -> f 3) (fun x -> x +1) )
```

Solution. Évaluation par VALEUR :

```
(fun x -> fun y -> x)
2
( (fun f -> f 3) (fun x -> x +1) )
---->
(fun y -> 2)
( (fun f -> f 3) (fun x -> x + 1) )
---->
(fun y -> 2)
( (fun f -> f 3) (fun x -> x + 1) )
---->
(fun y -> 2)
( (fun x -> x + 1) 3 )
---->
(fun y -> 2)
(3 + 1)
---->
(fun y -> 2)
4
---->
2
```

Évaluation par NOM :

```
(fun x -> fun y -> x)
2
( (fun f -> f 3) (fun x -> x +1) )
---->
(fun y -> 2)
( (fun f -> f 3) (fun x -> x + 1) )
---->
2
```

□

Fonctions récursives

Exercice 4. Considérez la fonction `append` définie par :

```
let rec append l1 l2 = match l1 with
  [] -> l2
  | t::q -> t::(append q l2);;
```

Démontrer les égalités suivantes :

– `append l1 [] = l1`,

Solution. Nous allons démontrer cette propriété par induction sur la longueur de la liste `l1`.

– Si `l1 = []`, alors

$$\text{append } l1 \ [] = \text{append } [] \ [] \rightarrow l2 = [] = l1$$

– Si `l1 = t : :q`, alors

$$\text{append } l1 \ [] = \text{append } t::q \ [] \rightarrow t::(\text{append } q \ [])$$

Car la longueur de la liste `q` est strictement plus petite que celle de la liste `t : :q`, par hypothèse d'induction

$$\text{append } q \ [] \rightarrow q$$

et donc

$$\text{append } l1 \ [] \rightarrow t::(\text{append } q \ []) \rightarrow t::q = l1 .$$

□

– `append (append l1 l2) l3 = append l1 (append l2 l3)`.

Solution. Nous allons démontrer cette propriété par induction sur la longueur de la liste `l1`.

– Si `l1 = []`, alors

$$\begin{aligned} \text{append } (\text{append } l1 \ l2) \ l3 &= \text{append } (\text{append } [] \ l2) \ l3 \\ &\rightarrow \text{append } l2 \ l3 \rightarrow l4 \\ \text{append } l1 \ (\text{append } l2 \ l3) &\rightarrow \text{append } l1 \ l4 \\ &= \text{append } [] \ l4 \rightarrow l4 \end{aligned}$$

– Si `l1 = t : :q`, alors

$$\begin{aligned} \text{append } (\text{append } l1 \ l2) \ l3 &= \text{append } (\text{append } t::q \ l2) \ l3 \\ &\rightarrow \text{append } t::(\text{append } q \ l2) \ l3 \\ &\rightarrow t::(\text{append } (\text{append } q \ l2) \ l3) \\ \text{append } l1 \ (\text{append } l2 \ l3) &= \text{append } t::q \ (\text{append } l2 \ l3) \\ &\rightarrow t::(\text{append } q \ (\text{append } l2 \ l3)) \end{aligned}$$

Car la longueur de la liste `q` est strictement plus petite que celle de la liste `t : :q`, par hypothèse d'induction

$$\text{append } (\text{append } q \ l2) \ l3 = \text{append } q \ (\text{append } l2 \ l3)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{append } (\text{append } l1 \ l2) \ l3 \\ &= t::(\text{append } (\text{append } q \ l2) \ l3) = t::(\text{append } q \ (\text{append } l2 \ l3)) \\ &= \text{append } l1 \ (\text{append } l2 \ l3) . \end{aligned}$$

□

Conseil : utiliser l'induction sur la longueur de la liste `l1`.

Types récursifs

Considérez le type récursif `arbre` avec son itérateur générique `arbre_iter` :

```

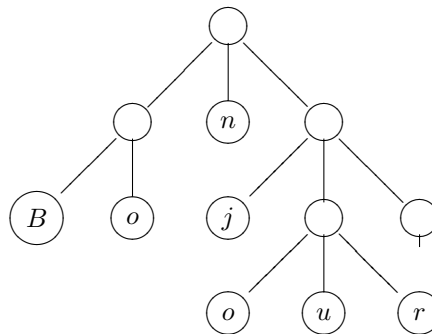
1 type arbre = Feuille of char | Noeud of arbre list ;;

3 let rec arbre_iter funvar funcoller premier funnoeud = fonction
4   Feuille c -> funvar c
5   | Noeud fils ->
6     let
7       recur = arbre_iter funvar funcoller premier funnoeud
8     in
9       funnoeud (
10        List.fold_left funcoller premier
11        (List.map recur fils));;

```

Un tel arbre a un nombre arbitraire fini de fils et peut stocker l'information, des caractères, sur les feuilles.

Exercice 5. Écrire une expression OCaml correspondant à l'arbre suivant :



Solution.

```

30 Noeud [ Noeud [Feuille 'B'; Feuille 'o'];
31         Feuille 'n';
32         Noeud [ Feuille 'j';
33                 Noeud [ Feuille 'o' ; Feuille 'u'; Feuille 'r' ];
34                 Noeud [];
35         ]
37     ];;

```

□

Exercice 6. En utilisant l'itérateur générique `arbre_iter`

- écrire une fonction `no_feuilles : arbre -> int` qui compte le nombre des feuilles dans un arbre.
- écrire une fonction `frontiere : arbre -> string` qui produit la chaîne de caractères placés sur les feuilles dans l'ordre de gauche à droite. (On pourra supposer qu'une fonction `char_to_string : char -> string`, transformant un caractère en chaîne de caractères, est définie).

Par exemple :

```

# let a = Noeud [Feuille 'a'; Noeud [Feuille 'c'; Feuille 'b']];;
no_feuilles a;;
- : int = 3
# frontiere a;;
- : string = "acb"

```

Solution. Voici le code :

```

3 let no_feuilles a =
4   let
5     funvar = fun x -> 1
6     and
7     (funcoller, premier) = ((+), 0)

```

```
8   and
9     funnoeud = fun x -> x
10  in
11    arbre_iter funvar funcoller premier funnoeud a;;

13 let char_to_string = String.make 1 ;;

15 let frontiere a =
16   let
17     funvar = char_to_string
18   and
19     (funcoller,premier) = ((^),"")
20   and
21     funnoeud = fun x -> x
22   in
23     arbre_iter funvar funcoller premier funnoeud a;;
```

□

Programmation

Exercice 7. On peut représenter un nombre positif en notation binaire par une suite d'entiers contenant seulement des 0 ou des 1. Le bit de poids plus faible sera en tête de la liste. Par exemple, les listes

[1;0;1], [1;1;0;1;0]

représenteront les nombres 5 et 11 respectivement. Le but de l'exercice est d'écrire une fonction `sommebin` qui calcule la (représentation binaire de la) somme de deux listes.

Plus précisément, on implémentera (le style de programmation sera fonctionnel) les fonctions décrites dans l'interface suivante :

```
(* On lèvera cette exception
   si une liste n'est pas la représentation
   binaire d'un nombre, à savoir si elle
   contient des entier différents de 0 et 1 *)
exception Nombre_non_binaire

(* Transformer une liste de 1,0 en entier *)
val to_int : int list -> int

(* Transformer un entier en sa représentation binaire *)
val from_int : int -> int list

(* Calcule la représentation binaire
   de la somme [i] + l,
   où i in {0,1}
   et l est la représentation binaire d'un nombre
   *)
val carry : int * int list -> int list

(* Calcule la représentation binaire
   de la somme [i] + l1 + l2,
   où i in {0,1}
   et l1,l2 sont des représentations binaires de deux nombres.
   On se sert pas des fonctions to_int et from_int
   *)
val sommebinc : int * int list * int list -> int list

(* Calcule la représentation binaire
   de la somme l1 + l2,
   où l1,l2 sont des représentations binaires de deux nombres.
   On se sert pas des fonctions to_int et from_int
   *)
val sommebin : int list -> int list -> int list
```

Solution.

```
exception Nombre_non_binaire;;

let rec to_int = function
  [] -> 0
  | 0::q -> 2 * to_int q
  | 1::q -> 1 + 2 * to_int q
  | _ -> raise Nombre_non_binaire;;

let rec from_int = function
  0 -> []
  | n -> (n mod 2)::from_int (n/2);;
```

```
let rec carry = function
  (0,1) -> 1
  | (1,[]) -> [1]
  | (1,t::q) ->
    (1-t)::carry (t,q)
  | _ -> raise Nombre_non_binaire;;

let rec sommebinc = function
  (c,[],ps) | (c,ps,[]) -> carry (c,ps)
  | (c,t1::q1,t2::q2) ->
    ((c + t1 + t2) mod 2)::sombinc ((c + t1 + t2) / 2,q1,q2);;

let sommebin n1 n2 = sombinc (0,n1,n2) ;;
```

□