

Università degli Studi di Milano

Facoltà di Lettere e Filosofia

Corso di laurea in Filosofia

**Semantica relazionale per la logica
lineare distributiva**

Relatore:
Prof. Corrado Mangione

Correlatore:
Prof. Giancarlo Meloni

Tesi di laurea di
Luigi Santocanale
Matricola 399341

Anno accademico 1993 / 1994

Presentazione

Questo lavoro è il frutto delle ricerche svolte in collaborazione con il prof. Giancarlo Meloni presso la cattedra di Logica Matematica del dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano. Esso peraltro non sarebbe stato possibile senza il decisivo contributo del prof. Corrado Mangione la cui attenzione scientifica ha attivato e promosso una stretta cooperazione tra il dipartimento di Filosofia e quello di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

Desidero pertanto esprimere la mia gratitudine al prof. Giancarlo Meloni e al prof. Corrado Mangione per l'impegno e l'entusiasmo con i quali hanno costantemente seguito lo sviluppo di questa tesi; inoltre per la generosità con la quale mi hanno fatto partecipe della loro competenza scientifica.

Ringrazio inoltre il prof. Piero Mussio e il prof. Paolo Bottoni con i quali ho stretto una fertile collaborazione presso la cattedra di Teoria dei Sistemi dell'Università degli Studi di Milano. Tale collaborazione che per più di un anno mi ha portato a frequentare il dipartimento di Teoria dei Sistemi è stata un continuo stimolo scientifico e intellettuale attraverso il quale sono maturate intuizioni e idee; tra queste vi sono quelle che hanno individuato nella logica lineare un necessario e concreto oggetto di studio.

Indice

Introduzione	4
Capitolo I.	
Logica distributiva	39
Capitolo II.	
Logica lineare.....	62
Capitolo III.	
Logica lineare distributiva: costruzione degli universi	80
Capitolo IV.	
Logica lineare distributiva: studio delle proprietà monoidali della congiunzione lineare	101
Capitolo V.	
Logica lineare classica distributiva	118
Capitolo VI.	
Definibilità	152
Conclusioni	160
Bibliografia	163

Introduzione

Dopo i risultati di Kurt Gödel [Göd31] che all'inizio degli anni trenta danno uno scacco al programma fondazionale di Hilbert, la logica, quasi liberata dal peso filosofico impostole dal problema dei fondamenti della matematica, ha avuto un notevole sviluppo tecnico: sono così state elaborate discipline quali la teoria della computabilità e la teoria dei modelli, è stata studiata la potenzialità della teoria degli insiemi. Risultati notevoli sono stati ottenuti in questi campi: ci limitiamo a segnalare la creazione dell'Analisi non-standard [Rob61] che riabilita gli infinitesimi di Leibniz nella teoria matematica, ambito dal quale erano stati espulsi nella seconda metà dell'ottocento; inoltre segnaliamo i risultati di Paul J. Cohen [Coh63/a],[Coh63/b] che stabiliscono l'indipendenza dell'assioma di scelta e dell'assioma del continuo nella teoria degli insiemi; entrambi questi risultati si prestano ad interessanti letture filosofiche che tuttavia un lettore formatosi in ambito tecnico potrebbe facilmente giudicare estrinseche e non pertinenti.

Crediamo che siano invece almeno due le conquiste della logica che ampliano in modo decisivo gli orizzonti di questa disciplina e che necessitano una immediata riflessione filosofica. Pensiamo ai risultati di Curry e Howard [How80] che stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti e metodi della teoria della dimostrazione e il λ -calcolo tipato. Attraverso questa corrispondenza la logica assurge a teoria di ciò che è computabile e pertanto essa diventa centrale nello studio della programmazione funzionale che si modella sul λ -calcolo. Questo confluire

dei metodi della teoria della dimostrazione nell'informatica è un argomento forte per chi come Gabriele Lolli [Lol91] ha proposto un ruolo fondazionale della logica nella scienza dell'informazione.

Siamo tuttavia maggiormente interessati ad un altro tipo di corrispondenza che mette in relazione la logica con la teoria delle categorie; tale associazione è stata proposta da Joachim Lambek [Lam68] e William Lawvere [Law69]: le proposizioni della logica corrispondono a oggetti di una categoria mentre le dimostrazioni sono morfismi tra oggetti. La logica diventa allora lo studio delle relazioni formali valide in una categoria; muta in particolare il tradizionale e conflittuale rapporto con la matematica in quanto questo viene mediato dalla teoria delle categorie. Questa teoria nasce nel 1945 ad opera di Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane [EML45] e si configura come un approfondimento delle formazioni concettuali sviluppate nel contesto dell'algebra astratta. La fertilità mostrata da tale teoria in molteplici campi ha imposto ai matematici un possibile punto di vista universale: nel 1965 Lawvere [Law65] assegna ad essa un ruolo esplicitamente fondazionale nei confronti dell'intera matematica. Riteniamo che una riflessione filosofica che voglia intervenire nel dibattito vertente sullo stato attuale della matematica¹ non possa eludere le domande che emergono a partire dalle proposte forti della teoria delle categorie: la portata di tale teoria nella matematica deve essere analizzata anche e non solo in relazione al problema fondazionale.

In questa prospettiva poniamo la rilevanza dell'oggetto del nostro studio, la logica lineare: tale logica si configura infatti come la logica della categorie monoidali chiuse, categorie che rivestono uno speciale ruolo nel

¹ In questo dibattito due valutazioni di tono esattamente opposto sono state date da Morris Kline [Kli80] e Keith Devlin [Dev88].

contesto della teoria e di una riflessione filosofica sulle categorie. Ci basti per adesso segnalare che in [Law73] la tesi che le strutture matematiche non sono arbitrarie costruzioni viene sostenuta (oppure, cambiando la sfumatura al discorso, si potrebbe dire che la tesi dell'arbitrarietà viene combattuta) avanzando la congettura che "le strutture fondamentali [della matematica] siano esse stesse categorie". Tale congettura si fonda su una generalizzazione del concetto di categoria basata sul concetto di categoria monoidale chiusa. La logica lineare pertanto diventa attraverso la corrispondenza il perno di tale argomentazione il cui contesto vogliamo dipanare e porre in primo piano; in particolare dovremo chiederci se la tesi della non arbitrarietà sia legata a un qualche tipo di realismo matematico. La breve presentazione storica della logica lineare che seguirà non pretende di avere un rigore scientifico; cercheremo di avvalorare la tesi della non arbitrarietà ponendo in primo piano non tanto la data di nascita di tale logica come teoria completa, ma piuttosto analizzando alcuni momenti della storia della matematica in cui si fa esplicito ricorso alle operazioni lineari prima e al di là di una chiara coscienza teorica del ruolo che tali operazioni hanno nel contesto della teoria delle categorie o nella logica. Tale procedimento è cosciente che nel suo intento di supportare la tesi forse ne è guidato e presuppone ciò che vuol dimostrare. Tuttavia con questo modo di procedere cercheremo innanzitutto di comprendere lo spirito di una tale esigenza realista per poi passare in seguito a più rigorose argomentazioni.

Logica lineare : un panorama storico

La prospettiva che ci siamo imposti indicherà le "origini" della logica lineare nell'uso di certe costruzioni algebriche, i prodotti tensoriali, che

dall'inizio di questo secolo mostrano la loro rilevanza e fertilità nell'ambito di disparate ricerche matematiche. L'Analisi tensoriale creata da Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita [LCRC901] per trattare i problemi legati all'espressione delle leggi fisiche in modo invariante rispetto ai cambiamenti di coordinate fa uso del prodotto tensoriale tra spazi vettoriali. A tali strumenti matematici ricorre la teoria della relatività generale che lega la determinazione delle grandezze fisiche a osservatori indipendenti e pertanto a diversi sistemi di coordinate. L'uso e la scoperta di tali prodotti diventa un fatto ricorrente in altre branche, ad esempio nel 1938 viene pubblicato l'articolo di Hassler Whitney sui prodotti tensoriali di gruppi abeliani [Whi38]. Se tali prodotti tensoriali sono esempi di congiunzioni lineari, osserveremo un fatto ricorrente in matematica: gli spazi di funzioni tra due oggetti matematici con la stessa struttura mantengono questa struttura, si pensi ad esempio ai morfismi tra due gruppi abeliani ove è possibile definire una somma tra funzioni, un elemento neutro e l'inverso; tali spazi di funzioni sono implicazioni che spesso si trovano in una relazione di aggiunzione con il bifuntore prodotto tensoriale. L'accento sulla centralità di tale problematica in matematica è stato posto da Samuel Eilenberg e Max Kelly nell'articolo sulle categorie chiuse [EK65] ovviamente nel quadro di una trattazione categoriale. Abbiamo visto sopra che negli anni sessanta viene esplicitato da Lambek e Lawvere il rapporto tra la teoria delle categorie e la logica. Gli oggetti di una categoria possono essere considerati proposizioni e le frecce tra due oggetti come dimostrazioni tra proposizioni. In tal caso l'assioma della teoria delle categorie che asserisce l'esistenza di una freccia identica per ogni oggetto diventa il principio di identità che asserisce che da ogni proposizione è derivabile la stessa proposizione; analogamente le proprietà della composizione vengono tradotte nel principio del taglio: se esiste una

dimostrazione da p a q e una da q a r allora esiste una dimostrazione da p a r . I prodotti tra due oggetti possono essere considerati congiunzioni tra proposizioni (ad esempio il prodotto cartesiano di due insiemi è una particolare congiunzione) e, nel caso di una categoria chiusa, gli spazi di funzioni sono implicazioni. Da questo punto di vista la logica lineare si pone allo stesso livello di generalità delle categorie monoidali chiuse: come casi particolari si considereranno le categorie cartesiane chiuse (ad esempio la categoria degli insiemi) ove il prodotto tensoriale considerato è l'usuale prodotto nel senso delle categorie (il prodotto cartesiano nel caso insiemistico); in tali categorie vigono le stesse leggi formali della logica intuizionista; nel caso delle algebre di Boole (che in quanto preordini sono particolari categorie) vigono rispetto alla congiunzione le stesse leggi formali della logica classica.

Se gli studi categoriali hanno mostrato che la logica lineare è insita nella pratica matematica da molto tempo, la chiarificazione a livello di regole formali di tale logica appare per la prima volta in un articolo di Joachim Lambek sulla struttura grammaticale di un enunciato [Lam58]. Lambek osserva che il tipo grammaticale di alcune parti del discorso può essere definito in termini di altre attraverso una implicazione lineare: ad esempio "predicato" può essere definito attraverso i tipi grammaticali "nome" ed "enunciato". Una volta che si sia indicato con e il tipo di un enunciato e con n il tipo di un nome, tale definizione consiste in:

$$p := n \backslash e .$$

Le leggi formali dell'implicazione lineare:

$$x \longrightarrow n \backslash e \quad \text{sse} \quad n \bullet x \longrightarrow e ,$$

asseriscono che "x è un predicato se e solo se, accostato a destra di un nome, produce un enunciato".

Sebbene le preoccupazioni di Lambek siano ristrette al tentativo di produrre un calcolo efficace per il riconoscimento automatico degli enunciati significanti di una lingua naturale, ci sembra rilevante osservare che Lambek è già cosciente del significato categoriale e altamente generale di questo formalismo: in una annotazione egli osserva che tali regole formali sono le stesse che vigono nell'algebra lineare e multilineare, vale a dire nella categoria degli spazi vettoriali e delle funzioni lineari.

Esiste un'altra via attraverso la quale la logica lineare si impone all'attenzione. Si tratta della tradizione di logica filosofica che, nella ricerca di una adeguata formalizzazione della nozione di implicazione stretta, arriva a produrre dei sistemi con forti analogie con la logica lineare. Ci riferiamo ai sistemi di logica della rilevanza [Dun86] che introducono congiunzioni intensionali per le quali in genere non valgono alcune delle regole strutturali del calcolo dei sequenti di Gerhard Gentzen [Gen34]. La tematizzazione dell'implicazione stretta è legata ad una discussione critica dell'implicazione materiale; ad esempio è noto che in logica classica lo schema $p \rightarrow q$ è sempre vero se p è falsa; tra le conseguenze sgradite della logica classica si trova che ogni enunciato controfattuale è vero, ad esempio "se non avessi perso gli occhiali in mare, li avrei comunque persi sulla luna" e ogni altra proposizione simile risulta essere vera. Analogamente vengono messe in discussione quelle forme di implicazione che fanno in modo che ogni verità necessaria implichi ogni altra verità necessaria: ad esempio ci può lasciare perplessi l'argomentazione che asserisce che " $2 + 2 = 4$ " implica " $7 + 3 = 10$ ". In questo contesto lo studio dell'implicazione stretta è motivato essenzialmente dalla tradizionale necessità di cogliere nel profondo la struttura delle diverse argomentazioni, in primo luogo quelle di carattere dialettico e filosofico. L'implicazione lineare segue questa tradizione; ad

esempio è possibile interpretarla in certi contesti addirittura come una forma di causalità: l'espressione $p \rightarrow q$ può essere letta come "l'insieme di tutte le azioni che posso fare in un sistema perché questo passi da uno stato che verifica p a uno stato che verifica q ".

L'interpretazione data sopra ha la sua origine nello studio dei quantali, strutture algebriche battezzate in questo modo da C. Mulvey [Mul86] poiché sono una generalizzazione dei locali alla logica dei quanti. L'interesse per i quantali nasce quindi da un tentativo di fondazione epistemologica della meccanica quantistica. In un recente articolo David Yetter [Yet90] ha chiarito quale sia la connessione tra la logica lineare e queste strutture: i quantali costituiscono una semantica algebrica completa. L'equivalenza data dal teorema di completezza mostra che la logica lineare è candidata a svolgere il ruolo di "logica della meccanica quantistica"; non si tratta tanto delle "quantum logics", concetto attinente alla teoria dei reticoli [BN36], ma piuttosto di una logica la cui congiunzione ha il significato di "e poi". "La validità logica intende catturare la verifica empirica (sia che si tratti di un esperimento o di programma lanciato), e la validità di $A \& B \dots$ è intesa come 'abbiamo verificato A e poi abbiamo verificato B ' " [Yet90]. In tale senso i quantali sono stati utilizzati da Samson Abramsky e Steven Vickers [AV93] per organizzare entro un unico contesto algebrico le diverse nozioni di equivalenza osservativa tra processi elaborate nel contesto della semantica dei processi per i calcoli per sistemi computazionali.

Nel 1987 Jean-Yves Girard pubblica su Theoretical Computer Science "Linear logic" [Gir87/a], articolo nel quale la logica lineare viene esposta attraverso un calcolo dei sequenti da un punto di vista che accentua le problematiche relative alla teoria della dimostrazione. Il punto di partenza per Girard consiste in uno studio e in una "purificazione costruttivista" della

semantica di Scott per la logica intuizionista. L'elaborazione di tale semantica porta alla ideazione degli spazi di coerenza, ovvero alla definizione di una categoria in cui le operazioni della logica lineare sono interpretate come funtori. Sebbene Girard collochi la rilevanza filosofica di ciò che presenta come una scoperta nell'ambito di una filosofia costruttivista della matematica — leggiamo infatti che "la logica lineare è una continuazione del processo di costruttivizzazione che comincia con la logica intuizionista", essa "...può essere raggiunta attraverso una più sottile analisi della semantica delle dimostrazioni..., o attraverso alcune più o meno immediate considerazioni sul calcolo dei sequenti" [Gir87/a] — ci sembra che proprio il fatto che tale logica sia nata nel contesto di una semantica categoriale possa mettere in discussione tali affermazioni che ci sembrano pertanto avere una natura più ideologica che fattuale. D'altro canto non è possibile negare la rilevanza che la logica, nella sua parziale veste di analisi dei processi strettamente finitari e costruttivi, ha nei confronti di una impostazione teoretica della non più neonata computer-science. Da qui la necessità di capire quale sia il ruolo della logica lineare nello studio dei processi computazionali; poiché tale logica è una naturale generalizzazione della logica intuizionista — la quale attraverso l'isomorfismo di Curry e Howard con il λ -calcolo tipato assurge addirittura a teoria delle funzioni computabili — si pone il problema di generalizzare gli strumenti della teoria della computabilità alle strutture intuitive suggerite dalla logica lineare. Se una prima intuizione aveva suggerito che il naturale sbocco di questo approccio fosse lo studio dei processi computazionali in parallelo [Gir87/b] tuttavia non siamo a conoscenza di risultati di notevole rilevanza in questa direzione. Segnaliamo l'articolo di Vladimir Alexiev [Ale94] per una ampia panoramica su questa area di ricerche.

Ciò che invece sembra rilevante nella logica "di Girard" è la presenza di una forma di negazione e di una disgiunzione lineare che danno alla logica una veste classica. Tale veste classica tuttavia non ha un corrispettivo chiaro nelle strutture matematiche tradizionali che costituiscono una semantica per la logica lineare, ad esempio l'insieme delle frecce di una categoria piccola. Il lavoro della presente tesi è rivolto in primo luogo a investigare la portata di questa negazione lineare classicheggiante in questi modelli: ne è risultato che la negazione lineare assume un ruolo ben determinato anche in questi contesti.

Un primo approccio alla logica lineare

Un utile riferimento per chi voglia accostarsi alla logica lineare può essere l'articolo di Girard apparso su *Le Scienze* [Gir91], ma per chi fosse interessato a vedere sul campo la logica lineare anche a costo di un minimo di formalismi consigliamo la lettura dell'articolo di Lambek [Lam58] accessibile anche a chi non abbia particolare dimestichezza con la scrittura matematica, ma soprattutto interessante per chi si occupi di linguistica.

Il modo usuale per introdurre la logica lineare consiste nell'asserire che essa è una logica sensibile alle risorse; così "la denotazione di una proposizione ... non si riduce al suo valore di verità ... ma considera inoltre il costo" [Gir91]. Analizzeremo pertanto alcuni esempi tratti dal linguaggio naturale in cui si riflette questa problematica delle risorse e del costo al fine di esemplificare il tipo di inferenza propria della logica lineare.

Chi faccia uso della logica classica riterrà valido questo schema:

se $p \multimap q$ e $p \multimap r$ allora $p \multimap q \wedge r$

(se da p segue q e da p segue r allora da p segue q e r).

Questo schema di argomentazione risulta in generale valido, si consideri per esempio:

se piove allora fuori è bagnato

e

se piove la gente apre gli ombrelli

dunque

se piove allora fuori è bagnato e la gente apre gli ombrelli.

Tuttavia nelle situazioni in cui si faccia riferimento a risorse deperibili tale tipo di argomentazione non vale. Si consideri il seguente esempio:

se ho 1400 lire allora bevo un caffè

e

se ho 1400 lire allora compro il biglietto dell'autobus

dunque

se ho 1400 lire allora bevo un caffè e compro il biglietto dell'autobus.

Tale argomentazione è decisamente sbagliata, e la conclusione corretta dovrebbe invece essere:

se ho 2800 lire allora bevo un caffè e compro il biglietto dell'autobus.

Ciò suggerisce chiaramente che lo schema di inferenza giusto debba essere:

se $p \wedge q$ e $p \wedge r$ allora $p \wedge (q \wedge r)$.

La logica lineare commutativa si occupa a un livello intuitivo delle relazioni che gestiscono lo scambio di risorse, e in questo contesto la

negazione lineare imposta un certo tipo di dualità tra dare e ricevere, tra offerta e richiesta. A titolo di esempio si consideri il seguente caso:

per tremila lire ottengo un pacchetto di sigarette

allora

se richiedo un pacchetto di sigarette ottengo una richiesta di tremilalire.

Tale tipo argomentazione viene colta dal seguente schema:

se $p \Rightarrow q$ allora $q^* \Rightarrow p^*$.

Una generalizzazione immediata concerne le risorse che deperiscono a causa del tempo; se la seguente argomentazione è valida:

se ho mille lire e ho duemilalire allora ho duemila lire e ho mille lire;

tuttavia non lo è la seguente:

se mangio e vado a dormire allora vado a dormire e mangio.

Analogamente chi segue una ricetta per preparare un pasto sarà ben cosciente che in taluni casi non è possibile invertire l'ordine degli ingredienti in quanto i risultati delle due operazioni sarà diverso.

La discussione mostra che non è sempre valido il seguente schema:

$p + q \Rightarrow q + p$.

Le regole fondamentali che la logica lineare rifiuta sono le regole strutturali nel senso del calcolo dei sequenti di Gentzen. Tali regole fondamentali sono:

$p \& p \emptyset p$ (contrazione),

$p \emptyset p \& p$ (espansione),

$p \& q \emptyset q \& p$ (scambio).

Abbiamo indicato con $\&$ la congiunzione lineare, che negli esempi precedenti era una forma di somma.

Gli esempi che abbiamo mostrato sono tratti dal linguaggio naturale; non siamo tuttavia al corrente di uno studio sistematico che raccolga ed espliciti formalmente le forme di inferenza lineari presenti nel linguaggio naturale; inoltre è stato intuito [Gir91] che i formalismi che sottostanno alla teoria chimica sono una forma di logica lineare, ma non siamo analogamente a conoscenza di un lavoro che espliciti questo rapporto.

Un secondo approccio alla logica lineare

Abbiamo finora mostrato che tra le argomentazioni quotidiane reperibili nel linguaggio naturale ne esistono alcune che sono riconducibili a una forma di ragionamento lineare.

Cercheremo adesso di comprendere più da vicino perché la logica lineare occupa una posizione privilegiata nel contesto della teoria delle categorie. Ripercorreremo pertanto le linee principali del testo di Lawvere [Law73] e per fare questo saremo costretti ad introdurre un minimo di formalismo che tuttavia cercheremo di limitare e spiegare intuitivamente.

Incominciamo esplicitando che cosa si intende con universo del discorso matematico o categoria.

Una categoria consiste di:

- oggetti: a, b, c, \dots

- per ogni coppia di oggetti a, b un insieme

$\text{hom}(a, b)$

di frecce;

- per ogni tripla di oggetti a, b, c una funzione

$\text{hom}(a, b) \times \text{hom}(b, c) \xrightarrow{\bullet} \text{hom}(a, c)$

detta composizione;

La composizione soddisfa il seguente assioma:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}(a, b) \times \text{hom}(b, c) \times \text{hom}(c, d) & \xrightarrow{\langle \bullet, l \rangle} & \text{hom}(a, c) \times \text{hom}(c, d) \\
 \downarrow \langle l, \bullet \rangle & & \downarrow \bullet \\
 \text{hom}(a, b) \times \text{hom}(b, d) & \xrightarrow{\bullet} & \text{hom}(a, d)
 \end{array}$$

Tale assioma esprime il fatto che la composizione tra frecce è associativa : $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$.

- per ogni oggetto a è assegnata una freccia identica:

$$1 \xrightarrow{\text{Id}_a} \text{hom}(a,a)$$

ove 1 è l'insieme con un solo elemento; tale freccia soddisfa i seguenti assiomi:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(a,b) \times 1 & \xrightarrow{\langle \text{Id}_b, \text{Id}_a \rangle} & \text{hom}(a,b) \times \text{hom}(b,b) \\ ? & & \downarrow \bullet \\ & & \text{hom}(a,b) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \times \text{hom}(a,b) & \xrightarrow{\langle \text{Id}_a, \text{Id}_b \rangle} & \text{hom}(a,a) \times \text{hom}(a,b) \\ ? & & \downarrow \bullet \\ & & \text{hom}(a,b) \end{array}$$

Tali assiomi esprimono il fatto che per ogni oggetto esiste una freccia identica che è elemento neutro a sinistra (a destra) rispetto alla composizione per quelle frecce che hanno come dominio (codominio) tale oggetto:

- se $f \in \text{hom}(a,x)$ per qualche oggetto x , allora $\text{Id}_a \bullet f = f$;
- se $f \in \text{hom}(x,b)$ per qualche oggetto x , allora $f \bullet \text{Id}_b = f$.

Si osservi che gli insiemi sono gli oggetti di una particolare categoria \mathcal{S} , ove le frecce sono le funzioni e la composizione è data dalla composizione di funzioni; ciò evidenzia il fatto che la definizione di categoria appena data dipende dalla categoria \mathcal{S} , dal prodotto cartesiano tra insiemi x , dall'insieme di un solo elemento 1 che è elemento neutro rispetto al prodotto cartesiano e dal fatto che \mathcal{S} è una categoria chiusa, cioè il funtore $\text{hom}(_,_)$ associa a due oggetti di \mathcal{S} — due insiemi — ancora un oggetto di \mathcal{S} — l'insieme di tutte le funzioni da uno all'altro. Si osservi inoltre che vale

la relazione di aggiunzione tra il funtore x e il funtore $\text{hom}(_, _)$, ossia ogni funzione di due variabili può essere considerata equivalentemente una funzione di una variabile che associa ad un elemento un'altra funzione di una variabile.

La definizione di categoria può pertanto essere generalizzata a una qualsiasi categoria monoidale chiusa, ossia una categoria V ove sia definito un prodotto e un hom funtore che abbiano le seguenti proprietà:

1) $(a \otimes b) \otimes c \simeq a \otimes (b \otimes c)$, ovvero vale la proprietà associativa;

2) $a \otimes 1 \simeq a \simeq 1 \otimes a$, ovvero esiste un oggetto neutro 1 per tale prodotto;

3) $a \otimes b \simeq b \otimes a$, vale la proprietà commutativa;

4) $\text{hom}: V^{\text{op}} \times V \longrightarrow V$, vale a dire che l'insieme delle frecce da un oggetto all'altro della categoria è anche un particolare oggetto della categoria;

5) $a \otimes _ : \text{hom}(a, _)$, cioè vale la relazione di aggiunzione tra i due funtori.

Per vedere cosa ciò significa si consideri l'insieme $2 = \{T, \perp\}$ dei valori di verità ordinato rispetto alla usuale relazione di dimostrabilità. E' noto che tale insieme è una categoria quando si ponga:

$$\text{hom}(x, y) = \begin{cases} \{xy\} & \text{se } x \leq y, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservi che $\text{hom}(x, y) \neq \emptyset$ se e solo se $x \leq y$, pertanto sse $T = x \rightarrow y$. L'implicazione pertanto è un hom funtore interno all'insieme dei valori di verità ed è aggiunto destro della congiunzione \wedge , operatore binario associativo e commutativo con elemento neutro il vero T . Valgono pertanto le seguenti relazioni che asseriscono che 2 è una categoria monoidale chiusa:

- (1) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$
- (2) $T \wedge x = x,$
- (3) $x \wedge y = y \wedge x,$
- (4) $\rightarrow: 2^{\text{op}} \times 2 \longrightarrow 2,$
- (5) $x \wedge y \emptyset z$ se e solo se $x \emptyset y \rightarrow z,$ cioè $x \wedge _ : x \rightarrow _.$

Costruire una categoria C valutata su 2 (anziché sulla categoria degli insiemi) equivale pertanto ad assegnare:

- oggetti: a, b, c, \dots

- per ogni coppia di oggetti a, b un elemento

$$C(a, b) \in \{T, \perp\}.$$

Ciò equivale ad assegnare una relazione tra gli oggetti. Infatti si ponga $a \leq b$ se e solo se $C(a, b) = T$.

- per ogni tripla di oggetti a, b, c un morfismo di 2

$$C(a, b) \wedge C(b, c) \longrightarrow C(a, c).$$

Ciò equivale a dire che:

$$C(a, b) \wedge C(b, c) \emptyset C(a, c)$$

formula che può essere letta in questo modo:

(i) se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.

- per ogni oggetto a è assegnata un morfismo di 2 :

$$T \longrightarrow C(a, a).$$

Analogamente ciò può essere letto in questo modo:

(ii) è sempre vero che $a \leq a$.

La discussione è intesa a mostrare che assegnare una categoria (piccola, cioè una categoria i cui oggetti siano un insieme e non una classe) valutata su 2 è equivalente ad assegnare un preordine $\langle S, \leq \rangle$, cioè un insieme con una relazione binaria transitiva (i) e riflessiva (ii).

Il punto di vista, espresso da William Lawvere in [Law73], secondo cui logica significa relazioni formali che hanno un carattere generale, porta dunque ad osservare che la logica lineare o logica generalizzata si applica direttamente a ogni categoria valutata in una arbitraria categoria monoidale chiusa, non solo in quella dei valori di verità. Se la logica intuizionista si applica a una qualsiasi categoria cartesiana chiusa, una categoria ove il prodotto considerato sia in particolare il prodotto cartesiano, e la logica classica si applica alla categoria dei valori di verità, si tratta di esemplificare concretamente il tipo di universi in cui si applica la logica lineare. Lawvere propone un esempio di logica quantitativa: l'insieme dei numeri reali positivi esteso con infinito $R = [0, \infty]$ ordinato dalla relazione \geq è una categoria dotata di un prodotto associativo con elemento neutro e aggiunto destro. Valgono infatti in R le relazioni:

$$(1) \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$(2) \quad x + 0 = x;$$

$$(3) \quad x + y = y + x;$$

$$(5) \quad x + y \geq z \text{ sse } y \geq z \div x, \text{ cioè } x + _ : _ \div x$$

ove \div è la differenza troncata a 0 e ovviamente associa a due numeri di R ancora un numero di R .

Esempi di strutture valutate su R sono gli spazi metrici. Infatti se X è uno spazio metrico e indichiamo con $X(a,b) \in R$ la distanza tra due punti $a, b \in X$, allora le usuali proprietà della distanza, la disuguaglianza triangolare che asserisce che un percorso spezzato è più lungo di un percorso diretto e quella che asserisce che la distanza di un punto da se stesso è nulla, rispettivamente:

$$X(a,b) + X(b,c) \geq X(a,c),$$

$$0 \geq X(a,a),$$

sono valutazioni della R -categoria X in R .

Si osservi che nel discorso di Lawvere la tesi che le strutture fondamentali della matematica siano categorie viene sostenuta da una parte mostrando che anche gli spazi metrici — oltre a i preordini e ai monoidi — sono riconducibili al concetto di categoria, dall'altra ponendo al centro della definizione di categoria il concetto stesso di categoria e non più il concetto di insieme. Il rapporto tra le due strutture matematiche viene invertito: le categorie non sono più definite attraverso gli insiemi, mentre le proprietà di questi vengono caratterizzate attraverso le proprietà categoriali della categoria degli insiemi [Law64].

L'approccio categoriale alla logica

Abbiamo fino ad adesso messo in rilievo quale rilevanza sia tecnica che filosofica acquisisca la logica — e in particolare la logica lineare — una volta che si prenda in considerazione lo strumento dato dalla corrispondenza di Lambek e Lawvere. Analizzeremo adesso il ruolo che la strumentazione

categoriale — usata in abbondanza nel presente lavoro — svolge nello studio della logica.

Osserveremo innanzitutto l'assenza dell'usuale presentazione della logica attraverso il linguaggio: a monte di questo approccio esistono ragioni profonde che esamineremo citando per prima cosa le seguenti parole di W. Lawvere: "Nello sviluppo matematico degli ultimi decenni si vede chiaramente la crescita della convinzione che le proprietà rilevanti degli oggetti matematici sono quelle che possono essere enunciate in termini della loro struttura astratta piuttosto che in termini degli elementi di cui si pensava fossero costituiti" [Law65]. Il problema relativo alla "sicurezza" della matematica, risolto in genere attraverso l'individuazione di una disciplina costitutiva di tutta la matematica, diventa secondario rispetto a una esigenza puramente descrittiva. Leggiamo in [Law69]: "per Fondamenti intenderemo qui lo studio di ciò che è universale in matematica. Quindi i Fondamenti in questo senso non possono essere identificati con nessun «punto di partenza» o «giustificazione»". In tal caso una fondazione della matematica non attribuirà un peso determinante agli insiemi, agli elementi e alla relazione di appartenenza; in modo analogo non metterà in primo piano i complessi di simboli e le regole concrete per maneggiarli. La logica è invece meglio descritta attraverso il concetto di teoria in senso invariante [Law75]: "una teoria è una categoria T con certe proprietà P e un modello di T è un funtore, che preserva le proprietà P , a valore negli insiemi". In particolare se la categoria T è un preordine allora la teoria è qualsiasi cosa costituita da arbitrari oggetti che chiamiamo proposizioni, da una relazione di dimostrabilità tra proposizioni e da operatori che di volta in volta sono chiamati a soddisfare certi assiomi. La strada così intrapresa non è quindi una rinuncia all'uso del linguaggio ma piuttosto è una generalizzazione di un

tale approccio formale: infatti gli usuali calcoli logici costruiti con il linguaggio possono essere considerati come le teorie libere sopra un insieme di generatori o proposizioni atomiche. Il ricorso al linguaggio potrà eventualmente essere uno strumento utile nella soluzione di particolari problemi ma evidentemente non potrà essere motivato in questo contesto da una filosofia idealista dei fondamenti che ponga il metodo deduttivo finitario come costitutivo della matematica.

L'approccio categoriale alla logica approfondisce e si lega idealmente e concretamente alla tradizione di studi chiamata algebra della logica il cui fondatore è George Boole [Boo847]. Tale tradizione — che conta nei suoi ranghi studiosi del calibro di Alfred Tarski il quale, insieme con Bjarni Jönsson [JT51], ha analizzato per primo operatori di arietà arbitraria in algebre di Boole aprendo concretamente la via alla nostra ricerca — evidenzia l'equivalenza dello studio della logica attraverso un calcolo o attraverso l'algebra di Lindenbaum generata dal calcolo. Le strumentazioni algebriche sono pertanto sufficienti allo studio della logica, il linguaggio è solo uno strumento.

Semantica : formazioni concettuali a confronto

Abbiamo visto che se le teorie logiche sono categorie i loro modelli sono funtori a valori negli insiemi. In linea di principio la situazione potrebbe essere generalizzata: un modello di una teoria è semplicemente un funtore a valori in un'altra categoria. Tuttavia tra le possibili categorie la categoria degli insiemi ha un ruolo principe in quanto le proprietà relative alle costruzioni in questa categoria possono spesso essere tradotte in proprietà relative a elementi; si apre così una dualità tra punti di vista, quello relativo alle

proposizioni, ai concetti e alle zone, e quello relativo agli individui e ai punti. Le problematiche logiche potranno essere analizzate da entrambi i due punti di vista; il teorema di completezza mostrerà l'equivalenza delle due ottiche. Vedremo nel nostro lavoro che i concetti propri della logica lineare si trasformeranno in concetti rilevanti della matematica quali quello di monoide e quello di isomorfismo nel contesto della particolare categoria dei bimoduli sopra insiemi parzialmente ordinati. Tale dualità di punti di vista che si fonda su teoremi di rappresentazione è uno degli strumenti più fertili della matematica: si pensi ad esempio al teorema di rappresentazione di Arthur Cayley [Cay878] che asserisce che ogni gruppo astratto è isomorfo a un gruppo concreto di permutazioni. Il teorema di rappresentazione di cui faremo uso invece è una generalizzazione del teorema di Marshall Stone [Sto36] che asserisce che ogni algebra di Boole, ovvero ogni teoria proposizionale classica, può essere rappresentata come un campo di insiemi. Nell'introduzione a [Joh82] viene esaminato sotto una prospettiva storica l'enorme contributo dato da tale teorema alla ricerca matematica, in particolare viene messo in rilievo che tale teorema abilita all'uso di metodi topologici nel contesto della logica e viceversa; le due discipline vengono pertanto a condividere problematiche e strumenti.

Siamo a conoscenza di due teoremi di rappresentazione per la logica lineare. Il primo [BG93] rappresenta una teoria lineare in un sottospazio di relazioni su un insieme. Il secondo [AD93], una volta definito un universo come un insieme con due relazioni d'ordine e tre relazioni ternarie, mostra che ogni teoria si rappresenta su un quoziente (nel senso di [Ros90]) della teoria dei crivelli costruita con la prima relazione d'ordine. Nel caso il reticolo della teoria lineare sia un reticolo distributivo questo teorema di rappresentazione coincide con quello qui presentato che è una

generalizzazione dei risultati presentati in [GM90]. E' sufficiente allora avere una sola relazione d'ordine e una sola relazione ternaria. Abbiamo scelto pertanto di lavorare in ambiente distributivo anche perché gli universi risultano "abbastanza semplici" ed è possibile una immediata analisi e comprensione dei concetti trovati attraverso le trasformazioni dalla sintassi alla semantica. Tuttavia lasciamo aperta la possibilità di studiare tali teoremi di rappresentazione e generalizzare i nostri risultati al caso non distributivo.

Il punto di vista concettuale legato allo studio algebrico della logica rende poco interessanti quei teoremi di completezza per semantiche di tipo algebrico che si limitano a constatare che l'algebra di Lindenbaum — ovvero qualche algebra costruita a partire dal linguaggio di un calcolo logico — soddisfa le condizioni algebriche associate alla definizione di teoria. Su questa linea è il teorema dovuto a David Yetter [Yet90] che stabilisce la completezza dei quantali rispetto alle teorie proposizionali lineari. Tuttavia tale teorema mostra anche che il reticolo della teoria può essere esteso a un reticolo completo costruito a partire da un universo canonico. Riteniamo però che con tale tipo di rappresentazione la comprensione delle strutture studiate sia meno profonda in quanto i due punti di vista equivalenti non sono più così differenti come nel caso della dualità tra concetti e individui. Infatti un universo è un monoide insieme con un nucleo quantico, concetto che, essendo proprio della categoria dei quantali, relativizza il concetto di universo a quello di teoria.

Il significato fondazionale della teoria delle categorie

In un saggio del 1985 [Mel85] Giancarlo Meloni chiarisce quale sia la portata della rivoluzione categoriale in matematica, e, raccogliendo gli stessi

suggerimenti di Lawvere, affianca a una critica degli usuali atteggiamenti riduzionistici nei programmi di fondazione della matematica la tesi che l'ambito filosofico entro il quale comprendere la portata di tale rivoluzione sia il materialismo dialettico.

Questa ultima tesi viene sostenuta in gran parte come risultato di una posizione realistica della conoscenza contro le tesi costruttiviste e idealiste in filosofia della matematica; leggiamo infatti in [Law80]: "secondo Lenin, l'immagine scientifica del mondo è una immagine di materia-che-si-muove e materia-che-pensa e inoltre il ruolo speciale della materia-che-pensa è di riflettere le relazioni decisive del mondo per fornire la teoria come guida all'azione. Questa immagine materialista del mondo è in opposizione alle immagini antiscientifiche del mondo rispettivamente dell'idealismo soggettivo e dell'idealismo oggettivo. L'idealismo soggettivo è stato architettato da Platone, Berkley... questo lavoro distruttivo e antiscientifico è stato continuato recentemente da Mach, Russell, Brouwer, Heisenberg, ecc".

A nostro avviso tale posizione realistica deve essere colta in rapporto a una critica delle fondazioni riduzionistiche della matematica, critica che metta in evidenza il ruolo descrittivo e non costitutivo di un approccio fondazionale. Infatti leggiamo che "per Fondamenti intendiamo lo studio di ciò che è universale in matematica... i Fondamenti non possono essere identificati con nessun *punto di partenza* o *giustificazione* per la matematica" [Law69]. Tale impegno descrittivo ci porterà piuttosto ad evidenziare analogie tra la teoria delle categorie come strumento di ricerca sulla molteplicità dei possibili mondi matematici e un certo tipo di ricerca fenomenologica. Osserviamo per adesso che il problema del riduzionismo si pone anche nel contesto di una fondazione categoriale della matematica: se le proprietà rilevanti di molte strutture matematiche possono essere colte

attraverso la strumentazione categoriale, si potrebbe pensare che questa possa esaurire le proprietà rilevanti di ogni struttura matematica: in tal caso la matematica sarebbe *ridotta* alla teoria delle categorie. Una prima risposta cerca di distinguere tra questo ultimo tipo di riduzionismo e quelli usuali: nelle proposte fondazionali tradizionali "si assume troppo spesso a priori da che cosa la matematica deve essere costituita (insiemi, costruzioni mentali, complessi di simboli, ecc.) e poi si sviluppa una gran mole di lavoro per dimostrare che in effetti è così... La trattazione categoriale invece si sta sviluppando con necessità dall'interno della ricerca matematica stessa" [Mel85]. Noi svilupperemo indipendentemente una critica ad ogni atteggiamento riduzionista in matematica e ci chiederemo se alla fondazione categoriale della matematica possa essere addossata l'imputazione di riduzionismo.

Negli ultimi vent'anni del secolo scorso, quale ulteriore sforzo di una ricerca che aveva visto i maggiori matematici dell'ottocento impegnati nel tentativo di dare una sistematizzazione rigorosa alla loro materia, Friedrich Gottlob Frege [Fre884] esplicitava il concetto di numero attraverso operazioni puramente logiche. La sua attenzione ai processi dimostrativi era volta a mostrare la possibilità di derivare le "verità" matematiche a partire da concetti puramente logici: era questo il nucleo fondamentale di quel tentativo di *riduzione* della matematica alla logica noto come *programma logicista*. Tale tentativo, portato fino in fondo da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead nei *Principia Mathematica* [RW913], era già stato messo in crisi da Russell stesso con la sua antinomia; per sfuggire a tale paradosso, che colpiva direttamente il principio logico di comprensione, era stata introdotta da Russell la teoria dei tipi, teoria che metteva in discussione la validità di

alcuni tra i più utili teoremi dell'Analisi; come soluzione a tale problema si ricorse nei *Principia* ad ulteriori assiomatizzazioni le quali però avevano un carattere assai più empirico che logico. La precarietà di tale soluzione sembrava segnare il fallimento stesso del programma logicista nel momento stesso in cui venivano pubblicati i *Principia*.

Pur difendendo la priorità delle diverse teorie rispetto ad una loro riduzione ad un unico fondamento logico, David Hilbert nella sua relazione al congresso di matematica di Parigi del 1900 [Hil900] proponeva come irrinunciabile il problema di dimostrare la coerenza dell'aritmetica. Tale dimostrazione sarebbe stata la meta ideale di una catena di dimostrazioni di coerenza che fondavano teorie "più complesse" su altre "più semplici". La soluzione da lui proposta a tale problema consisteva essenzialmente nel tentativo di catturare l'aritmetica in un sistema formale, ovvero in qualche cosa di strettamente manipolabile e soggetto a leggi cosiddette "finitarie". Questo è il nucleo del cosiddetto *programma formalista*; come è noto, l'insufficienza di tale soluzione fondazionale venne mostrata da Kurt Gödel [Göd31] nel suo celebre teorema di incompletezza. Ancora una volta veniva messa in dubbio la possibilità di una riduzione della matematica a un suo ambito privilegiato, l'aritmetica finitaria per l'occasione.

Negli anni successivi al 1931, anno in cui Gödel pubblica il suo teorema, sopravvive quale approccio fondazionale con un carattere apertamente riduzionista la "scuola insiemistica": ogni struttura matematica viene colta a partire dagli insiemi e dalle operazioni "lecite" sugli insiemi. Il concetto di insieme diventa pertanto il perno della matematica. Tale approccio tuttavia non nasconde punti deboli; ad esempio il ricorso all'assiomatizzazione per chiarire il concetto intuitivo di insieme ha evidenziato alcuni paradossi. In primo luogo è noto che ogni sistema formale

coerente ha un modello numerabile (si tratta del noto teorema di Löwenheim), e ciò ci suggerisce che non è possibile cogliere la nozione intuitiva di insieme di cardinalità più che numerabile; in secondo luogo i risultati congiunti di Gödel [Göd39] e Paul J. Cohen [Coh63/b] mostrano che l'ipotesi del continuo è indipendente dall'usuale assiomatizzazione di Zermelo-Fraenkel. Esistono allora molteplici mondi insiemistici e nell'ottica fondazionale molteplici matematiche. Solo una scelta di sapore empirico, e pertanto in una certa misura arbitraria, può far optare per una matematica piuttosto che per un'altra.

Una analisi che accentui il punto di vista storico mostra che il problema dei fondamenti sorge nel culmine di quel processo di rigorizzazione dell'analisi che vede impegnati i maggiori matematici del diciannovesimo secolo (ad esempio Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor). Durante questo secolo sembra ben acquisito quale sia il corpo di conoscenze che costituisce la matematica: si tratta di geometria, analisi e aritmetica. I lavori a cavallo dei due secoli dedicati al problema dei fondamenti elaborano nel migliore dei modi i concetti fondamentali di queste aree: il piano viene oramai identificato col prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali, un punto viene ridotto a una coppia di numeri reali. Si tratta quindi di chiarificare il concetto di numero reale e a questa analisi sono dedicati alcuni dei lavori di Weierstrass, Dedekind e Cantor; si osserva che un numero reale può essere pensato come una classe di equivalenza di successioni di numeri razionali e questi sono riconducibili a coppie di numeri naturali; di qui l'impegno di Frege alla chiarificazione del concetto di numero naturale. Un percorso analogo è quello che induce Hilbert a concentrare i propri sforzi sul problema di dimostrare la coerenza dell'aritmetica. I modelli

per le geometrie non euclidee mostravano che queste erano coerenti se lo era la geometria euclidea, e per quanto visto in precedenza il problema della coerenza della geometria veniva scaricato successivamente sull'Analisi e sull'aritmetica.

Tuttavia se si può dire che a inizio del diciannovesimo secolo geometria, analisi e aritmetica costituivano la matematica, non si può asserire lo stesso per la fine dello stesso secolo. Infatti durante il secolo vengono elaborate nuove tecniche al fine di risolvere problemi propri dell'usuale matematica; tuttavia queste tecniche si dimostrano degne di uno studio specifico; nascono pertanto nuove discipline che arricchiscono e mettono in crisi il corpo di conoscenze tradizionale. Si pensi alla teoria dei gruppi, nata ad opera di Galois allo scopo di decidere della risolubilità di sistemi di equazioni. Un discorso analogo può essere fatto per la topologia il cui creatore Henri Poincaré a fine secolo mostrava l'irrisolubilità di certi sistemi di equazioni differenziali e proponeva tecniche alternative al fine di studiare i sistemi dinamici. Nel frattempo nasce il concetto di algebra astratta come studio di quelle leggi generali che tuttavia non sono universali, non sono verità assolute. Questo nuovo atteggiamento ha origine in alcune novità concettuali quali ad esempio la scoperta dei quaternioni ad opera di Hamilton: i quaternioni sono una naturale generalizzazione del concetto di numero; tuttavia tale generalizzazione non soddisfa la proprietà commutativa della moltiplicazione. Se una soluzione al problema dei fondamenti fosse arrivata alla fine del secolo scorso, sarebbe stata una soluzione parziale limitata a talune discipline matematiche che già mostravano limiti intrinseci nella soluzione dei propri problemi.

Per porre tutt'oggi il problema dei fondamenti della matematica bisogna essere in grado di dare indicazioni sufficienti a questo quesito: quale

sia l'oggetto della matematica. Una risposta possibile è quella di colui che, osservata la molteplicità delle forme della ricerca matematica, tenda ad individuare nel metodo il perno unificante della matematica. Il metodo dimostrativo allora assurge a oggetto della matematica stessa e gli enti matematici diventano mere costruzioni dell'uomo. Questo tipo di risposta tuttavia lascia aperti molti interrogativi e non ci sembra cogente; si potrebbe in primo luogo obiettare che nemmeno il metodo dimostrativo sia univocamente determinato tra fattori delle diverse logiche; inoltre si potrebbe porre la questione del perché arbitrarie strutture create dall'uomo si siano rivelate così efficaci nello studio della realtà fisica; crediamo tuttavia che si farebbe bene a chiedere perché la stessa persona non affermi ad equal voce che le scienze sperimentali si occupano del metodo sperimentale: la molteplicità delle aree di ricerca non può essere confusa con l'assenza di un oggetto di ricerca. In questo contesto ci sembra opportuno assumere un atteggiamento positivo verso la molteplicità senza adottare un punto di vista riduzionistico; in particolare ricondurre la matematica a un suo nucleo ci sembra un atto ideologico che disconosce la fertilità della ricerca nelle diverse discipline presupponendo di conoscere in anticipo le svariate forme che la ricerca matematica può elaborare.

Ci sembra pertanto che la novità propria della teoria delle categorie è stato il riconoscimento epistemologico dell'autonomia dei diversi universi del discorso matematico, della molteplicità delle categorie. A questo riconoscimento è seguita una ovvia rinuncia a trovare un centro di gravitazione per l'intera matematica; e sebbene il legame con la pratica matematica sia forte ed esplicito², tale rinuncia non si limita a un mero

² Si veda ad esempio il più noto trattato sulla teoria delle categorie [MLa71].

richiamo alla pratica contro ogni discorso teoretico e fondazionale, ma assume invece come compito primario per ogni proposito fondazionale l'impegno descrittivo di una molteplice realtà che si manifesta nella complessità delle ricerche matematiche concrete.

Tale impegno descrittivo sotto, al quale è certamente un qualche tipo di atteggiamento realista, è una sorta di fenomenologia del paesaggio matematico mossa da un latente grido "alle cose stesse"; cosicché il ruolo della dimostrazione non può essere più costitutivo dell'oggetto matematico, e come una narrazione può essere più o meno adeguata all'oggetto che descrive, così il compito di un matematico non si esaurisce nella dimostrazione di una data proprietà, ma consiste anche nella ricerca di una dimostrazione che sia consonante all'oggetto, che ne sveli le strutture profonde. Come si evince da [Mel85] gran parte dell'attività di Lawvere come matematico è stata quella di riproporre da nuovi punti di vista, giudicati più pertinenti, oggetti ben conosciuti alla tradizione matematica. L'analogia con un certo tipo di atteggiamento fenomenologico non si limita ad evidenziare l'impegno descrittivo della teoria ma può essere estesa a una sottolineatura dell'uso dialettico che la teoria delle categorie fa tra studio delle strutture generali condivise da molti universi matematici e studio delle peculiarità delle singole categorie; la constatazione del particolare non è sufficiente ma devono essere colte le strutture generali e invarianti; a sua volta il livello del generale può essere colto e sviluppato solo se in rapporto diretto con la pratica matematica, ovvero con la particolarità dei molteplici universi. Il fine di questo stretto legame metodologico è sia quello di conoscere nei dettagli la specificità di un oggetto in questione, sia quello di evidenziare e dipanare utili analogie e intrecci tra diversi campi della matematica. Il modello fenomenologico che abbiamo presente è quello che fa della fenomenologia

un "metodo di caratterizzazione degli atti di esperienza attraverso l'esibizione di differenze di strutture" [Pia79] e che metta in primo piano il procedimento della variazione di esempio come mezzo per esercitare quella intuizione dell'essenza in rapporto all'esperienza concreta. Analogamente potremmo sottolineare l'esigenza propriamente fenomenologica di cogliere quei dati essenziali dell'esperienza (ad esempio la causalità) senza postulazioni metafisiche, cioè senza abbandonare l'esperienza concreta: così la fondazione categoriale della matematica deve nascere dall'interno della pratica di ricerca matematica anziché presupporre ciò di cui è costituita.

L'analogia tra metodo fenomenologico e teoria delle categorie ci sembra per altri versi stimolante in quanto aiuta a riproporre tradizionali problemi della filosofia della matematica servendosi di categorie filosofiche meno obsolete: ad esempio la questione vertente sull'esistenza degli oggetti matematici viene ancora risolta nelle usuali dicotomie realismo-idealismo e platonismo-costruttivismo, oppure vengono proposte soluzioni al dilemma in termini di sociologia della conoscenza [DH85] o di interpretazione nella pratica matematica [Pet91]; a nostro avviso queste due ultime soluzioni rinunciano a trovare uno status ontologico ben definito e sembrano pertanto carenti nello spiegare perché la matematica sia riconosciuta come la scienza più oggettiva, riconoscimento contenuto anche nella tesi della non arbitrarietà. Ci sembra invece che il rapporto tra oggetto matematico e processo dimostrativo possa essere ben caratterizzato attraverso il concetto di intenzionalità; una analisi del polo noetico del rapporto è proprio ciò che fa l'algebra della logica oggettivando in una categoria le strutture attraverso le quali avviene la dimostrazione.

Abbiamo lasciato in sospeso la questione se con la fondazione categoriale avvenga un nuovo processo di riduzione della matematica a un suo ambito privilegiato. La questione può essere discussa a fondo, ma cominciamo a rilevare che vi possono essere due vie distinte attraverso le quali una metodologia scientifica può risolversi nei confronti del metodo adottato. E' noto ad esempio che la teoria dell'*epoché* assume nell'ultimo Husserl una importanza sempre crescente, mentre per il modello fenomenologico a cui ci siamo agganciati essa rimane una mera operazione preliminare di messa tra parentesi dei giudizi. Analogamente possiamo leggere affermazioni di Lawvere che tendono ad accentuare il ruolo esauriente della teoria delle categorie nei confronti dell'intera matematica: la non arbitrarietà delle strutture in matematica può essere concentrata nella "tesi che le strutture fondamentali sono esse stesse categorie" [Law73]; oppure in [LS91] l'algebra delle frecce di una categoria viene paragonata esplicitamente all'algebra filosofica con la quale, secondo Leibniz, i filosofi avrebbero risolto ogni discussione con un "calculemus". In altri contesti invece leggiamo affermazioni che sembrano meno perentorie: "la correttezza del punto di vista categoriale ha portato a una più chiara comprensione in modo tale da organizzare meglio e talvolta dirigere la crescita della conoscenza matematica e delle sue applicazioni... Forse il punto di vista categoriale è solo un precursore di un altro ancor più fondamentale; per adesso è il migliore che conosciamo" [LS91].

Ci sembra di poter risolvere con una prima approssimazione il problema della dialettica tra molteplicità degli oggetti studiati e unicità del metodo osservando che anche un approccio positivo verso il molteplice che diffidi di qualsiasi tentativo riduzionista sarebbe sterile se si limitasse alla constatazione senza tentare di coordinare la molteplicità da un punto di vista

unitario. Nel caso particolare della matematica diventa una esigenza concreta quella di coordinare le diverse aree di ricerca dando la possibilità ai matematici di usare un linguaggio comune, un linguaggio universale che sia abbastanza penetrante per poter esprimere agevolmente i problemi specifici pertinenti alle diverse discipline. Tale esigenza viene ad esempio espressa nell'introduzione a [Joh82] dove la figura di Marshall Stone assurge a simbolo del matematico per eccellenza, capace di dare notevoli contributi nella propria disciplina non disdegnando ma anzi mettendo a frutto conoscenze mutate da altri ambiti della matematica. Crediamo che sia proprio questa capacità di svolgere il ruolo di linguaggio comune dei matematici che sta alla base della fertilità della teoria delle categorie, capacità che invece sembra mancare alla teoria degli insiemi e alla teoria della dimostrazione. Talvolta ad esempio l'esibizione di una dimostrazione può diventare addirittura un ostacolo alla circolazione delle idee tra matematici come nel caso di dimostrazioni di notevole lunghezza³. Il ricorso alla teoria delle categorie diventa non tanto un rifiuto del ruolo oggettivante della dimostrazione ma invece il contesto entro il quale la dimostrazione può effettivamente svolgere tale ruolo.

Se abbiamo visto che un punto di vista non riduzionista non esclude l'utilizzo di un linguaggio universale e coordinante, crediamo anche che sarebbe un errore mettere al bando una esplicita domanda filosofica che interroghi fino in fondo le potenzialità fondazionali del metodo. Si osservi che tale domanda nel caso delle proposte fondazionali sulla matematica investe problemi concreti e seri quali ad esempio le metodologie di insegnamento di tale disciplina e pertanto coinvolge una riflessione sulla cultura

³ Un caso limite è il teorema di classificazione dei gruppi finiti semplici. Invitiamo a una lettura di [Gor92] per inquadrare il contesto di tale problematica.

contemporanea che, proprio attraverso tale insegnamento preponderante nelle scuole, tende a scindersi nei due aspetti scientifico e umanistico. D'altra parte è proprio la fertilità del metodo che richiede uno studio attento delle proprie potenzialità, ma ciò deve essere fatto nel modo e nello spirito corretto: ciò che non può essere ricondotto al linguaggio della teoria delle categorie non per questo può essere dimenticato così come non si deve presupporre che tutti i problemi possano essere risolti in tale teoria. Un valido tentativo di riduzione al metodo e alla teoria delle categorie può essere condotto non tanto col fine di dimostrare che tutto può essere ridotto ma piuttosto col fine opposto di trovare i limiti della teoria: da questi limiti nuove fertili concettualizzazioni possono scaturire, magari più profonde nel senso di Lawvere; l'esperienza del teorema di incompletezza di Gödel, valutata positivamente, dovrebbe indurci in questo tipo di atteggiamento: non tanto una accettazione incondizionata di strumenti scientifici ma un esercizio esplicito di critica di fronte a una situazione di "scienza normale" [Kuh62].

Articolazione della tesi

Dopo questa introduzione con la quale abbiamo voluto esplicitare il contesto nel quale la nostra ricerca ha una chiara rilevanza filosofica, il lavoro svolto verrà presentato in sei capitoli. Il materiale sarà presentato seguendo queste linee guida: da una parte daremo una esposizione delle ricerche svolte relative alla logica lineare distributiva il più possibile autocontenuta, in modo che il lettore possa studiare direttamente su questo testo senza far riferimento ad altri; da un'altra parte invece allargheremo i nostri orizzonti per mostrare che le concettualizzazioni di cui facciamo uso sono inquadrabili nel più largo contesto della teoria delle categorie, mentre le

concettualizzazioni che veniamo scoprendo non sono arbitrarie e hanno un preciso significato nel contesto di una particolare categoria. Per questo secondo aspetto presupporremo una conoscenza di teoria delle categorie; rinviamo a [MLa71] per i risultati di cui faremo uso.

Nel primo dei sei capitoli sarà studiata la logica distributiva. L'approccio seguito in questa esposizione è una generalizzazione al caso geometrico della presentazione della logica classica presente in [GM90].

Nel secondo capitolo verrà presentata la logica lineare. L'esposizione metterà in evidenza che le proprietà fondamentali di questa logica nascono dalla relazione di aggiunzione tra congiunzione e implicazione. Tale logica verrà esemplificata su concrete strutture matematiche quale lo spazio di tutte le relazioni su un insieme.

Il terzo capitolo entra nel vivo del tema della tesi: la logica lineare distributiva. Sarà innanzitutto studiata la relazione di aggiunzione tra congiunzione e implicazione in una teoria di crivelli su un universo. Si mostrerà che esiste una corrispondenza biunivoca tra tali congiunzioni nella teoria e certe relazioni ternarie nell'universo. Questa parte del lavoro segue gli spunti offerti in [GM90] ed elaborati nel contesto delle ricerche svolte presso la cattedra di Logica Matematica del dipartimento di Matematica dell'Università di Milano. Molto lavoro sarà invece speso per mostrare la naturalità nel senso della teoria delle categorie di tale corrispondenza biunivoca, cercando innanzitutto la categoria nella quale collocare i concetti relativi all'universo. Tale categoria è quella dei bimoduli sopra insiemi parzialmente ordinati; si mostrerà che in tale categoria acquisiscono senso i concetti importati negli universi attraverso la logica lineare.

Nel quarto capitolo verranno studiate le proprietà monoidali della congiunzione lineare. Si mostrerà allora che la classe delle teorie lineari

distributive è completa rispetto ai monoidi nella categoria dei bimoduli. Esempi concreti di tali monoidi verranno illustrati.

Il quinto capitolo è dedicato allo studio degli universi per la logica lineare classica. Verranno mostrati esempi concreti di tali universi e verranno presi in considerazione alcuni schemi validi in tali strutture. Tali schemi verranno poi investigati nel contesto di universi arbitrari e con delle derivazioni o contromodelli si mostreranno i rapporti reciproci di derivabilità o indipendenza di tali assiomi.

Il sesto capitolo affronta infine il tema della definibilità di condizioni semantiche. I risultati sono stati ottenuti generalizzando al caso di arbitrarie teorie modali il concetto di p -morfismo della logica modale esposto in [Gol92].

Capitolo I

Logica distributiva

Oggetto di studio di questo capitolo è la logica distributiva o logica geometrica. Premettiamo alla trattazione di tale argomento alcuni cenni di teoria dei reticoli per poter definire il concetto di teoria proposizionale geometrica e mettere in campo gli strumenti principali dei quali ci serviremo nelle dimostrazioni nel seguito di questo capitolo e nei capitoli seguenti. Una teoria proposizionale geometrica sarà pertanto un reticolo distributivo; data questa definizione potremo trattare i concetti centrali della logica: quello di universo, quello di interpretazione semantica e la completezza semantica. Tale trattazione inquadrerà questi concetti logici nel contesto della teoria delle categorie. Si mostrerà allora che l'operazione di costruzione della teoria dei crivelli di un universo e l'operazione di costruzione dell'universo dei filtri primi di una teoria sono operazioni "inverse" nel senso che sono legate dalla relazione di aggiunzione. Il nucleo di tale relazione è il concetto di interpretazione semantica o modello che può essere analizzato equivalentemente in termini di morfismo tra universi oppure in termini di morfismo tra teorie. Il punto di arrivo sarà il teorema di completezza che sarà un corollario del più forte teorema di rappresentazione: per ogni teoria esiste un morfismo iniettivo dalla teoria nella teoria dei crivelli dell'universo dei filtri primi della teoria stessa.

Elementi di teoria dei reticoli

Preordini

Definizione 1. Un preordine è una coppia $\langle S, \leq \rangle$ ove S è un insieme e \leq è una relazione binaria che gode delle seguenti proprietà:

per ogni $x, y, z \in S$

$$[\text{Rifl}] \quad x \leq x,$$

$$[\text{Tran}] \quad x \leq y \text{ e } y \leq z \text{ implica } x \leq z.$$

Definizione 2. Un elemento i di un preordine è un massimo minorante di x e y se $i \leq x$ e $i \leq y$ e, per ogni j , se $j \leq x$ e $j \leq y$ allora $j \leq i$. Posto $x \wedge y := i$ le condizioni possono essere riassunte nel seguente assioma:

$$[\wedge] \quad z \leq x \wedge y \text{ sse } z \leq x \text{ e } z \leq y.$$

Un elemento T di un preordine è un elemento massimo se vale per ogni $x \in S$:

$$[\text{T}] \quad x \leq T.$$

Dualmente diciamo che un elemento s di un preordine è un minimo maggiorante di x e y se $x \leq s$ e $y \leq s$ e, per ogni t , se $x \leq t$ e $y \leq t$ allora $s \leq t$.

Posto $x \vee y := s$ le condizioni possono essere riassunte nel seguente assioma:

$$[\vee] \quad x \vee y \leq z \text{ sse } x \leq z \text{ e } y \leq z.$$

Un elemento \perp di un preordine è un elemento minimo se vale per ogni $x \in S$:

$$[\text{T}] \quad \perp \leq x.$$

Definizione 3. In un preordine la relazione di uguaglianza viene definita in questo modo:

$$x = y \text{ sse } x \leq y \text{ e } y \leq x.$$

Monoidi e semireticoli

Definizione 4. Un monoide è una terna $M = \langle S, \bullet, 1 \rangle$ ove $\bullet: S \times S \longrightarrow S$ è una operazione binaria associativa e $1 \in S$ è elemento neutro a sinistra e a destra per tale operazione. Valgono pertanto i seguenti assiomi:

$$[\text{Ass}\bullet] \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z) ,$$

$$[1] \quad x \bullet 1 = x = 1 \bullet x .$$

Definizione 5. Un morfismo tra due monoidi M_1 e M_2 è una funzione $f: S_1 \longrightarrow S_2$ che preserva le operazioni, cioè tale che:

$$f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y) ,$$

$$f(1) = 1 .$$

Definizione 6. Un sottoinsieme $I \subseteq S$ è un ideale del monoide M se e solo se esiste un monoide M' e un morfismo $f: M \longrightarrow M'$ tale che $I = f^{-1}(\{1\})$.

Definizione 7. Un semireticolo è un monoide commutativo $\langle S, \bullet, 1 \rangle$ ove ogni elemento è idempotente, ovvero valgono i seguenti assiomi:

$$[\text{Comm}\bullet] \quad x \bullet y = y \bullet x .$$

$$[\text{id}\bullet] \quad x \bullet x = x .$$

Proposizione 1. In un semireticolo si ponga

$$x \leq_1 y \text{ sse } x \bullet y = x.$$

Allora la relazione \leq_1 induce un ordine nell'insieme S in cui 1 è elemento massimo e l'elemento $x \bullet y$ è massimo minorante di x e y .

Analogamente si ponga

$$x \leq_2 y \text{ sse } x \bullet y = y.$$

Allora la relazione \leq_2 induce un ordine nell'insieme S in cui 1 è elemento minimo e l'elemento $x \bullet y$ è minimo maggiorante di x e y .

Dimostrazione (per il caso \leq_1 , il secondo caso segue per dualità).

Da $x \bullet x = x$ segue $x \leq x$, e da $x \leq y$ e $y \leq z$, cioè $x \bullet y = x$ e $y \bullet z = y$, segue $x \bullet z = (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z) = x \bullet y = x$, cioè $x \leq z$.

Da $x \bullet 1 = x$ segue $x \leq 1$ per ogni x ; se $x \leq y$ e $x \leq z$, cioè $x \bullet y = x$ e $x \bullet z = x$, allora $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z = x \bullet z = x$, pertanto $x \leq y \bullet z$; viceversa se $x \leq y \bullet z$ allora $x \bullet (y \bullet z) = x$ da cui $x \bullet y = (x \bullet (y \bullet z)) \bullet y = x \bullet (y \bullet y) \bullet z = x \bullet y \bullet z = x$, pertanto $x \leq y$ e analogamente si dimostra $x \leq z$.

Reticoli

Definizione 8. Un reticolo è un preordine dotato un elemento minimo e un elemento massimo in cui per ogni coppia di elementi esistono un massimo minorante e un minimo maggiorante .

Proposizione 2. Ogni reticolo $\langle S, \leq \rangle$ ha la seguente struttura:

$$\langle S, \wedge, T, v, \perp \rangle$$

ove:

- $\langle S, \wedge, T \rangle$ è un semireticolo;

- $\langle S, v, \perp \rangle$ è un semireticolo;

valgono le seguenti leggi di assorbimento:

$$[As_{\wedge v}] \quad x \wedge (xvy) = x,$$

$$[As_{v\wedge}] \quad xv(x\wedge y) = x.$$

Viceversa ogni quintupla $\langle S, \wedge, T, v, \perp \rangle$ che soddisfa gli assiomi precedenti è un reticolo rispetto alla relazione d'ordine definita da

$$x \leq y \quad \text{sse} \quad x \wedge y = x.$$

Dimostrazione.

Parte della dimostrazione è immediata. Assegnato un reticolo $\langle S, \leq \rangle$ siano \wedge, T, v, \perp rispettivamente il massimo minorante, il massimo, il minimo maggiorante e l'elemento minimo.

Mostriamo come esempio che vale la proprietà associativa. Da $(x\wedge y)\wedge z \leq x\wedge y$ e $x\wedge y \leq x$ segue che $(x\wedge y)\wedge z \leq x$. Analogamente $(x\wedge y)\wedge z \leq y$ e inoltre $(x\wedge y)\wedge z \leq z$ pertanto $(x\wedge y)\wedge z \leq y\wedge z$ e $(x\wedge y)\wedge z \leq x\wedge(y\wedge z)$. L'altra parte dell'uguaglianza vale per la proprietà commutativa del massimo minorante.

Mostriamo che vale una delle leggi di assorbimento. Da $x \leq x$ e $x \leq xvy$ segue che $x \leq x\wedge(xvy)$. Viceversa si osservi che è sempre vero $x\wedge z \leq x$.

L'altra parte della proposizione viene dimostrata in questo modo. Per la proposizione 1 $\langle S, \wedge, T \rangle$ è ordinato dalla relazione \leq_1 definita da $x \leq_1 y$ sse $x\wedge y = x$, $x\wedge y$ è massimo minorante di x e y e T è elemento massimo rispetto a tale relazione. Analogamente $\langle S, v, \perp \rangle$ è ordinato dalla relazione \leq_2 definita da $x \leq_2 y$ sse $xvy = y$, xvy è minimo maggiorante di x e y e \perp è elemento minimo per tale ordine. Le leggi di assorbimento permettono

di dimostrare che $x \wedge y = x$ se e solo se $xvy = y$, cioè che la relazione \leq_1 associata al semireticolo $\langle S, \wedge, T \rangle$ coincide con la relazione \leq_2 associata al semireticolo $\langle S, v, \perp \rangle$, pertanto rispetto a tale relazione il preordine ha massimo, minimo, massimi minoranti e minimi maggioranti. Infatti $x \wedge y = x$, allora $xvy = (x \wedge y)v = y$ e analogamente se $xvy = y$, allora $x \wedge y = x \wedge (xvy) = y$.

Definizione 9. Un morfismo tra due reticoli $f: R_1 \longrightarrow R_2$ è morfismo di monoidi per entrambi i semireticoli $\langle S_j, \wedge, T \rangle$ e $\langle S_j, v, \perp \rangle$.

Proposizione 3: Reticolo duale. Sia $R = \langle S, \wedge, T, v, \perp \rangle$ un reticolo. Si ponga:

$$R^{op} = \langle S, \wedge_{op}, T_{op}, v_{op}, \perp_{op} \rangle$$

ove:

$$\wedge_{op} := v; \quad T_{op} := \perp; \quad v_{op} := \wedge; \quad \perp_{op} := T.$$

Allora R^{op} è un reticolo in cui la relazione \leq_{op} è definita da:

$$x \leq_{op} y \text{ sse } y \leq x.$$

La verifica è immediata ed è lasciata al lettore.

Proposizione 4: Principio di dualità. Sia A un enunciato valido in ogni reticolo R . Allora è valido in ogni reticolo R l'enunciato A^{op} ottenuto da A sostituendo a ogni occorrenza di un operatore binario o zeroario l'operatore opposto, e sostituendo la relazione \leq con la sua opposta.

Si osservi che A^{op} è valido in un reticolo R sse A è valido in R^{op} e quest'ultimo fatto è vero per ipotesi.

Definizione 10. Un reticolo si dice distributivo se valgono le due seguenti leggi:

$$[d_{\wedge}] \quad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$[d_{\vee}] \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Definizione 11. Un reticolo R si dice sup-completo se ogni sottoinsieme arbitrario $I \subseteq S$ ammette un minimo maggiorante $\vee I$ tale che per ogni $x \in S$ vale:

$$\vee I \leq x \quad \text{sse} \quad i \leq x \text{ per ogni } i \in I.$$

Un reticolo si dice inf-completo se ogni sottoinsieme arbitrario $I \subseteq S$ ammette un massimo minorante $\wedge I$ tale che per ogni $x \in S$ vale:

$$x \leq \wedge I \quad \text{sse} \quad x \leq i \text{ per ogni } i \in I.$$

Proposizione 5. Un reticolo è sup-completo sse è inf-completo.

Supponiamo che R sia sup-completo. Sia

$$\wedge I = \vee \{ x \mid x \leq i \text{ per ogni } i \in I \}.$$

Sia $j \in I$ mostriamo che $\vee \{ x \mid x \leq i \text{ per ogni } i \in I \} \leq j$, ovvero $x \leq j$ se $x \leq i$ per ogni $i \in I$. Ovviamente $x \leq j$ poichè $j \in I$. Viceversa se $x \leq i$ per ogni $x \in I$ allora $x \in \{ x \mid x \leq i \text{ per ogni } i \in I \}$, pertanto $x \leq \vee \{ x \mid x \leq i \text{ per ogni } i \in I \}$.

La dimostrazione dell'altra implicazione è analoga ponendo:

$$\vee I = \wedge \{ x \mid i \leq x \text{ per ogni } i \in I \}.$$

Parleremo pertanto di reticoli completi senza specificare per quale tipo di operazione sono tali.

Definizione 12. Sia $\mathbf{2}$ il reticolo così definito:

$$\mathbf{2} = \langle \{T, \perp\}, \wedge, \vee, \perp \rangle$$

ove \wedge e \vee sono definiti dalle usuali tavole di verità.

Definizione 13. Sia $R = \langle S, \wedge, \vee, \perp \rangle$ un reticolo. Allora $\iota \subseteq S$ è un ideale del reticolo R se e solo se ι è un ideale del monoide $\langle S, \vee, \perp \rangle$.

$\phi \subseteq S$ è un filtro del reticolo R sse ϕ è un ideale di R^{op} .

Proposizione 6. $\iota \subseteq S$ è un ideale di R se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- i) $\perp \in \iota$;
- ii) se $x \in \iota$ e $y \in \iota$ allora $x \vee y \in \iota$;
- iii) se $x \in \iota$ e $y \leq x$ allora $y \in \iota$.

Dimostrazione.

Per ipotesi esiste un morfismo di monoidi $f: S \longrightarrow S'$ tale che $\iota = \{x \mid f(x) = \perp\}$.

Da $f(\perp) = \perp$ segue i. Sia $f(x) = \perp$ e $f(y) = \perp$, allora $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \perp \vee \perp = \perp$.

Sia $y \leq x$, cioè $y \vee x = x$, allora $f(y) = f(y) \vee \perp = f(y) \vee f(x) = f(y \vee x) = f(x) = \perp$.

Viceversa sia ι un sottoinsieme di S che soddisfa le tre condizioni. Allora la funzione anticaratteristica $\hat{\chi}_\iota: S \longrightarrow \mathbf{2}$ è un morfismo di monoidi. Infatti posto $\hat{\chi}_\iota(x) = \perp$ sse $x \in \iota$ si osserva che $\hat{\chi}_\iota(\perp) = \perp$ e $\hat{\chi}_\iota(x \vee y) = \perp$ sse $x \vee y \in \iota$ sse $x \in \iota$ e $y \in \iota$ sse $\hat{\chi}_\iota(x) = \perp$ e $\hat{\chi}_\iota(y) = \perp$ sse $\hat{\chi}_\iota(x) \vee \hat{\chi}_\iota(y) = \perp$.

Corollario. $\phi \subseteq S$ è un filtro di R se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- i) $T \in \phi$;
- ii) se $x \in \phi$ e $y \in \phi$ allora $x \wedge y \in \phi$;
- iii) se $x \in \phi$ e $x \leq y$ allora $y \in \phi$.

Definizione 14. $\phi \subseteq S$ è un coideale di R se e solo se il complemento di ϕ è un ideale.

$\iota \subseteq S$ è un cofiltro sse il complemento di ι è un filtro.

Proposizione 7. $\phi \subseteq S$ è un coideale di R se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- i) $\perp \notin \phi$;
- ii) se $x \vee y \in \phi$ allora $x \in \phi$ o $y \in \phi$;
- iii) se $x \in \phi$ e $x \leq y$ allora $y \in \phi$.

$\iota \subseteq S$ è un cofiltro di R se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- i) $T \notin \iota$;
- ii) se $x \wedge y \in \iota$ allora $x \in \iota$ o $y \in \iota$;
- iii) se $x \in \iota$ e $y \leq x$ allora $y \in \iota$.

Definizione 15. $\iota \subseteq S$ è un ideale primo di R se e solo se esiste un morfismo di reticoli $f: R \longrightarrow 2$ tale che $\iota = f^{-1}(\perp)$.

$\phi \subseteq S$ è un filtro primo sse ϕ è un ideale primo di R^{op} .

Proposizione 8. $\iota \subseteq S$ è un ideale primo di R se e solo se ι è un ideale ed è un cofiltro.

Se ι è un ideale primo: esiste un morfismo di reticoli $f: R \longrightarrow 2$ tale che $\iota = f^{-1}(\perp)$. Ovviamente ι è un ideale; mostriamo che ι è un cofiltro, cioè ι^c è

un ideale di R^{op} . Si osservi che la negazione $\neg: \mathbf{2}^{op} \longrightarrow \mathbf{2}$ è un isomorfismo di reticoli e che $x \in \iota^c$ sse $f(x) = T$, pertanto $x \in \iota^c$ sse $\neg(f(x)) = \perp$. La funzione $\neg(f(_)): R \longrightarrow \mathbf{2}$ è il morfismo richiesto per asserire che ι^c è un filtro.

Se ι è un ideale allora la sua funzione anticaratteristica $\hat{\chi}_\iota: S \longrightarrow \mathbf{2}$ è un morfismo di monoidi e pertanto preserva \vee e \perp ; inoltre se ι^c è un filtro la sua funzione anticaratteristica $\hat{\chi}_{\iota^c}: R^{op} \longrightarrow \mathbf{2}$ preserva \vee e \perp , pertanto la sua funzione caratteristica $\chi_{\iota^c} = \neg(\hat{\chi}_{\iota^c}): S \longrightarrow \mathbf{2}$ preserva \wedge e T . Si osservi che $\hat{\chi}_\iota = \chi_{\iota^c}$. Infatti $\chi_{\iota^c}(x) = \perp$ sse $x \notin \iota^c$ sse $x \in \iota$ sse $\hat{\chi}_\iota(x) = \perp$. Pertanto la funzione anticaratteristica di ι è un morfismo di reticoli tale che $\iota = \hat{\chi}_\iota^{-1}(\perp)$.

Corollario. $\phi \subseteq S$ è un filtro primo di R se e solo se ϕ è un filtro ed ϕ è un coideale.

Proposizione 9: Lemma del filtro massimale. Sia ι un ideale e ϕ un filtro tali che $\iota \cap \phi = \emptyset$. Allora esiste un filtro (ideale) massimale tra quelli disgiunti da ι (ϕ).

Sia $F = \{ \phi' \mid \phi' \text{ è un filtro, } \phi' \supseteq \phi \text{ e } \iota \cap \phi' = \emptyset \}$. F è un insieme ordinato dalla relazione di inclusione e per ipotesi non vuoto. Inoltre è un insieme induttivo nel senso che ogni catena di elementi $\phi_1 \subseteq \phi_2 \dots \phi_n \subseteq \phi_{n+1} \dots$ ammette minimo maggiorante in F . Infatti $\phi' := \bigcup_{n \geq 0} \phi_n$ è ancora un filtro che soddisfa $\phi' \supseteq \phi$ e $\iota \cap \phi' = \emptyset$. Si applichi a F il lemma di Zorn.

Definizione 16. $\langle A \rangle = \bigwedge \{ \phi \mid \phi \text{ è un filtro, } \phi \supseteq A \}$.

Proposizione 10. $\langle A \rangle$ è un filtro.

Infatti l'intersezione arbitraria di filtri è ancora un filtro.

$T \in \bigwedge \{ \phi_j \}$ perché $T \in \phi_j$ per ogni j . $x, y \in \phi_j$ per ogni j implica che $x \wedge y \in \phi_j$ per ogni j ; se $x \in \phi_j$ per ogni j e $x \leq y$ allora $y \in \phi_j$ per ogni j .

Proposizione 11. $\langle A \rangle = \{ x \mid \exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n \}$.

Mostriamo che $\phi_A = \{ x \mid \exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n \}$ è un filtro.

Per $n = 0$ $T \geq T$ pertanto $T \in \phi_A$. Siano $x, y \in \phi_A$ allora $\exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ e $\exists a_{n+1} \dots a_m \in A \ y \geq a_{n+1} \wedge \dots \wedge a_m$ pertanto $x \wedge y \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge a_{n+1} \wedge \dots \wedge a_m$ e $x \wedge y \in \phi_A$.

Sia $y \geq x$ e $x \in \phi_A$. $\exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ e pertanto $y \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ e $y \in \phi_A$.

Si osservi che $\phi_A \supseteq A$, infatti da $a \in A$ e $a \geq a$ segue $a \in \phi_A$.

Pertanto $\langle A \rangle \subseteq \phi_A$.

Dimostriamo che se ϕ è un filtro tale che $\phi \supseteq A$ allora $\phi \supseteq \phi_A$. Infatti se $x \in \phi_A$ allora $\exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Poiché $a_j \in \phi$ segue che $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \in \phi$ e $x \in \phi$.

Si osservi che $\langle A \rangle \supseteq A$, pertanto $\langle A \rangle \supseteq \phi_A$.

Definizione 17. A è una base di filtro sse $\langle A \rangle = \hat{A} := \{ x \mid \exists a \in A \ x \geq a \}$.

Proposizione 12. A è una base di filtro sse $\forall a_1 \dots a_n \in A \exists a \in A \ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \geq a$.

Supponiamo che sia $\langle A \rangle = \hat{A}$. Scelti $a_1 \dots a_n \in A \ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \in \langle A \rangle \subseteq \hat{A}$. Pertanto $\exists a \in A \ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \geq a$.

Supponiamo valga $\forall a_1 \dots a_n \in A \exists a \in A \ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \geq a$. Ovviamente $\hat{A} \subseteq \langle A \rangle$.

Dimostriamo che $\langle A \rangle \subseteq \hat{A}$. Se $x \in \langle A \rangle$ allora $\exists a_1 \dots a_n \in A \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$, allora $\exists a \in A \ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \geq a$, pertanto $x \geq a$ e $x \in \hat{A}$.

Proposizione 13. Sia R un reticolo distributivo e sia ι un ideale e ϕ un filtro tali che $\iota \cap \phi = \emptyset$. Sia $\phi'(\iota')$ un filtro (ideale) massimale tra quelli disgiunti da ι (ϕ). Allora $\phi'(\iota')$ è un filtro (ideale) primo.

Dobbiamo verificare che ϕ' è un coideale, in particolare soddisfa le condizioni i) e ii) per i coideali.

$\perp \notin \phi'$ poichè $\perp \in \iota$ e $\iota \cap \phi' = \emptyset$.

Sia $xvy \in \phi'$ e supponiamo che $x \notin \phi'$ e $y \notin \phi'$. Allora i filtri $\langle \phi' \cup \{x\} \rangle$ e $\langle \phi' \cup \{y\} \rangle$ contengono propriamente $\phi' \supseteq \phi$ pertanto deduciamo che $\iota \cap \langle \phi' \cup \{x\} \rangle \neq \emptyset$ e $\iota \cap \langle \phi' \cup \{y\} \rangle \neq \emptyset$. Allora esistono $z, w \in \iota$ $z \in \langle \phi' \cup \{x\} \rangle$, $w \in \langle \phi' \cup \{y\} \rangle$. Si osservi che $z \in \langle \phi' \cup \{x\} \rangle$ sse $\exists f_1 \in \phi$, $z \geq f_1 \wedge x$, analogamente $w \in \langle \phi' \cup \{y\} \rangle$ sse $\exists f_2 \in \phi$, $w \geq f_2 \wedge y$. Ma allora:

$$zvw \geq (f_1 \wedge x) \vee (f_2 \wedge y) = (f_1 \vee f_2) \wedge (f_2 \vee x) \wedge (f_1 \vee y) \wedge (xvy) \in \phi'.$$

Pertanto $zvw \in \iota \cap \phi'$ contro le ipotesi.

Proposizione 14: Lemma di estensione/esclusione(L.E.E.)

Sia R un reticolo distributivo e sia ι un ideale e F una base filtro tali che $\iota \cap F = \emptyset$. Allora esiste un filtro primo ϕ tale che $\phi \supseteq F$ e $\iota \cap \phi = \emptyset$.

Da $\iota \cap F = \emptyset$, segue che $F \subseteq \iota^c$, e per la proprietà iii) dei coideali $\uparrow F \subseteq \iota^c$, cioè $\langle F \rangle \subseteq \iota^c$ ovvero $\iota \cap \langle F \rangle = \emptyset$. Pertanto esiste un filtro primo ϕ tale che $\phi \supseteq \langle F \rangle \supseteq F$ e $\iota \cap \phi = \emptyset$.

Logica geometrica

La categoria delle teorie

Definizione 18. Una teoria proposizionale geometrica è un reticolo distributivo $T = \langle P, \emptyset, \top, \wedge, \perp, \vee \rangle$ ove:

- P è un insieme di proposizioni ;
- \emptyset è la relazione binaria del reticolo che coincide con la relazione di dimostrabilità tra le proposizioni di P .

Definizione 19. Una interpretazione sintattica tra due teorie proposizionali geometriche T_1 e T_2 è un morfismo tra reticoli $f: T_1 \longrightarrow T_2$.

Definizione 20. \mathcal{T} è la categoria i cui oggetti sono le teorie proposizionali geometriche e i cui morfismi sono le interpretazioni sintattiche.

La categoria degli universi

Definizione 21. Un universo per la logica geometrica è una coppia $U = \langle S, \leq \rangle$ ove:

- S è un insieme di stati;
- \leq è una relazione binaria di specializzazione riflessiva e transitiva.

Definizione 22. Un morfismo tra due universi U_1 e U_2 è una funzione $f: U_1 \longrightarrow U_2$ che preserva la relazione di specializzazione:

$$\sigma \leq \tau \text{ implica } f(\sigma) \leq f(\tau).$$

Definizione 23. \mathbf{U} è la categoria i cui oggetti sono gli universi e le cui frecce sono i morfismi tra universi.

Il funtore \mathbf{O} ("zone")

Sia $\mathbf{U} = \langle S, \leq \rangle$ un universo.

Definizione 24. $C \subseteq \mathbf{U}$ è un crivello sse

$$\sigma \in C \text{ e } \tau \leq \sigma \text{ implica } \tau \in C.$$

Definizione 25. $\mathbf{OU} = \{ C \mid C \subseteq \mathbf{U} \text{ e } C \text{ è un crivello} \}$.

Proposizione 15. \mathbf{OU} è una teoria proposizionale geometrica rispetto alla relazione di dimostrabilità \subseteq tra insiemi.

Inoltre in \mathbf{OU} valgono le seguenti leggi distributive infinitarie:

$$x \wedge \bigvee_j \{y_j\} = \bigvee_j \{x \wedge y_j\},$$

$$x \vee \bigwedge_j \{y_j\} = \bigwedge_j \{x \vee y_j\}.$$

La dimostrazione segue dal fatto \mathbf{OU} è chiuso rispetto a intersezioni e unioni arbitrarie e dal fatto che \emptyset e S sono crivelli. Le leggi distributive infinitarie valgono perchè la funzione inclusione $i: \mathbf{OU} \longrightarrow P(S)$ preserva arbitrarie unioni e intersezioni.

Siano \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 due universi e sia $f: \mathbf{U}_1 \longrightarrow \mathbf{U}_2$ un morfismo di universi.

Proposizione 16. $\mathbf{O}f: \mathbf{OU}_2 \longrightarrow \mathbf{OU}_1$ definita da:

$$\mathbf{O}f(C) = \{ \sigma \mid f(\sigma) \in C \}$$

è una interpretazione sintattica.

Dimostrazione.

$\sigma \in \text{Of}(C \cup D)$ sse $f(\sigma) \in C \cup D$ sse $f(\sigma) \in C$ o $f(\sigma) \in D$ sse $\sigma \in \text{Of}(C)$ o $\sigma \in \text{Of}(D)$ sse $\sigma \in \text{Of}(C) \cup \text{Of}(D)$.

$\sigma \in \text{Of}(\emptyset)$ sse $f(\sigma) \in \emptyset$ sse falso.

$\sigma \in \text{Of}(C \cap D)$ sse $f(\sigma) \in C \cap D$ sse $f(\sigma) \in C$ e $f(\sigma) \in D$ sse $\sigma \in \text{Of}(C)$ e $\sigma \in \text{Of}(D)$ sse $\sigma \in \text{Of}(C) \cap \text{Of}(D)$.

$\sigma \in \text{Of}(S)$ sse $f(\sigma) \in S$ sse vero.

Proposizione 17. L'assegnamento :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} & & \longrightarrow \mathbf{OU} \\ U_1 \xrightarrow{f} U_2 & \longrightarrow & \mathbf{OU}_1 \xleftarrow{\text{Of}} \mathbf{OU}_2 \end{array}$$

definisce un funtore $O: \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{T}^{\text{op}}$.

Si osservi che $O(I_U) = I_{OU}$. Infatti $\sigma \in OI_U(C)$ sse $I_U(\sigma) \in C$ sse $\sigma \in C$. Inoltre $O(f \bullet g) = Og \bullet Of$. Infatti $\sigma \in Og \bullet Of(C)$ sse $\sigma \in \text{Of}(Og(C))$ sse $f(\sigma) \in Og(C)$ sse $g(f(\sigma)) \in C$ sse $f \bullet g(\sigma) \in C$ sse $\sigma \in O(f \bullet g)(C)$.

Il funtore \bullet ("punti")

Sia $T = \langle P, \emptyset, T, \wedge, \perp, \vee \rangle$ una teoria.

Definizione 26. $\bullet T = \{ \phi \mid \phi \subseteq T, \phi \text{ è un filtro primo} \}$.

Si definisca la seguente relazione in $\bullet T$:

$$\phi_1 \leq \phi_2 \text{ sse } \phi_1 \supseteq \phi_2.$$

Proposizione 18. $\langle \bullet T, \leq \rangle$ è un universo.

La verifica è immediata.

Siano T_1 e T_2 due teorie e sia $f: T_1 \longrightarrow T_2$ una interpretazione sintattica.

Proposizione 19. $f^\bullet: \bullet T_2 \longrightarrow \bullet T_1$ definita da:

$$f^\bullet(\phi) = \{ \sigma \mid f(\sigma) \in \phi \}$$

è un morfismo di universi.

Si osservi innanzitutto che la preimmagine di un filtro primo è un filtro primo.

Infatti se $\phi = g^{-1}(\{T\})$, $g: T_2 \longrightarrow 2$ allora $f^\bullet(\phi) = f^{-1}(g^{-1}(\{T\})) = (f \bullet g)^{-1}(\{T\})$. Ma

si osservi che $f \bullet g$ è un morfismo di reticoli, pertanto $f^\bullet(\phi)$ è un filtro primo.

Supponiamo che $\phi \leq \phi'$, cioè $\phi \supseteq \phi'$. Sia $p \in f^\bullet(\phi')$, cioè $f(p) \in \phi'$, pertanto $f(p) \in \phi$ e $p \in f^\bullet(\phi)$. Pertanto $f^\bullet(\phi) \supseteq f^\bullet(\phi')$, cioè $f^\bullet(\phi) \leq f^\bullet(\phi')$.

Proposizione 20. L'assegnamento :

$$\begin{array}{ccc} T & & | \longrightarrow \langle \bullet T, \leq \rangle \\ T_1 \xleftarrow{f} T_2 & & | \longrightarrow \bullet T_1 \xrightarrow{f^\bullet} \bullet T_2 \end{array}$$

definisce un funtore $\bullet: \mathcal{T}^{op} \longrightarrow \mathcal{U}$.

Si osservi che $(I_T)^\bullet = I_{\bullet T}$. Infatti $p \in I_T^\bullet(\phi)$ sse $I_T(p) \in \phi$ sse $p \in \phi$. Inoltre $(f \bullet g)^\bullet = g^\bullet \bullet f^\bullet$. Infatti $p \in g^\bullet \bullet f^\bullet(\phi)$ sse $p \in f^\bullet(g^\bullet(\phi))$ sse $f(p) \in g^\bullet(\phi)$ sse $g(f(p)) \in \phi$ sse $f \bullet g(p) \in \phi$ sse $p \in (f \bullet g)^\bullet(\phi)$.

L'aggiunzione tra il funtore zone e il funtore punti

Abbiamo mostrato che "zone" e "punti" sono una coppia di funtori tali che:

$$\mathcal{U} \begin{array}{c} \xrightarrow{O} \\ \xleftarrow{\bullet} \\ \bullet \end{array} \mathcal{T}^{op},$$

mostriamo che vale la seguente

Proposizione 21. Il funtore \bullet è aggiunto destro del funtore O .

Dimostrazione.

Mostriamo che innanzitutto che:

$$\mathbf{U}(U, \bullet T) \quad ? \quad \mathbf{T}^{\text{op}}(OU, T).$$

Sia ϕ la corrispondenza che porta

$$U \xrightarrow{f} \bullet T \quad \xleftarrow{\phi} \quad OU \xleftarrow{\phi f} T$$

definita da:

$$\phi f(p) = \{ \sigma \mid p \in f(\sigma) \}.$$

Sia ψ la corrispondenza che porta

$$U \xrightarrow{\psi \mu} \bullet T \quad \xleftarrow{\psi} \quad OU \xleftarrow{\mu} T$$

definita da:

$$\psi \mu(\sigma) = \{ p \mid \sigma \in \mu(p) \}.$$

Si osservi che $\phi f \in \mathbf{T}^{\text{op}}(OU, T)$ e $\psi \mu \in \mathbf{U}(U, \bullet T)$.

Inoltre $\phi \bullet \psi = I_{\mathbf{U}(U, \bullet T)}$ e $\psi \bullet \phi = I_{\mathbf{T}^{\text{op}}(OU, T)}$.

Infatti $p \in \psi(\phi f)(\sigma)$ sse $\sigma \in \phi f(p)$ sse $p \in f(\sigma)$, e $\sigma \in \phi(\psi \mu)(p)$ sse $p \in \psi \mu(\sigma)$ sse $\sigma \in \mu(p)$.

Mostriamo che ϕ è una trasformazione naturale nelle due variabili U e T .

Bisogna mostrare pertanto che:

1) $\phi_T: \mathbf{U}(_, \bullet T) \longrightarrow \mathbf{T}^{\text{op}}(O_, T)$ è una trasformazione naturale dei funtori

$$\mathbf{U}(_, \bullet T): \mathbf{U}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

$$\mathbf{T}^{\text{op}}(O_, T): \mathbf{U}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Sia $U' \xrightarrow{f} U$, dobbiamo mostrare che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}(U, \bullet T) & \xrightarrow{\phi_{U,T}} & \mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}, T) \\ \downarrow f \bullet _ & & \downarrow \text{Of} \bullet _ \\ \mathbf{U}(U', \bullet T) & \xrightarrow{\phi_{U',T}} & \mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}', T) \end{array}$$

Sia $U \xrightarrow{g} \bullet T$, dobbiamo mostrare che $\phi_{U',T}(f \bullet g) = \phi_{U,Tg} \bullet \text{Of}$.

Infatti:

$\sigma \in \phi_{U',T}(f \bullet g)(p)$ sse $p \in (f \bullet g)(\sigma) = g(f(\sigma))$ sse $f(\sigma) \in \phi_{U,Tg}(p)$ sse $\sigma \in \text{Of}(\phi_{U,Tg}(p))$ sse $\sigma \in (\phi_{U,Tg} \bullet \text{Of})(p)$.

2) $\phi_U: \mathbf{U}(U, \bullet _) \longrightarrow \mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}, _)$ è una trasformazione naturale dei funtori

$$\mathbf{U}(U, \bullet _): \mathbf{T}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

$$\mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}, _): \mathbf{T}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Sia $T' \xrightarrow{\mu} T$, dobbiamo mostrare che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}(U, \bullet T) & \xrightarrow{\phi_{U,T}} & \mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}, T) \\ \downarrow _ \bullet \mu & & \downarrow _ \bullet \mu \\ \mathbf{U}(U, \bullet T') & \xrightarrow{\phi_{U,T'}} & \mathbf{T}^{\text{op}}(\text{OU}, T') \end{array}$$

Sia $U \xrightarrow{g} \bullet T$, dobbiamo mostrare che $\phi_{U,T'}(g \bullet \mu) = \mu \bullet \phi_{U,Tg}$.

Infatti:

$\sigma \in \phi_{U,T'}(g \bullet \mu)(p)$ sse $p \in (g \bullet \mu)(\sigma) = \mu(g(\sigma))$ sse $\mu(p) \in g(\sigma)$ sse $\sigma \in \phi_{U,Tg}(\mu(p))$ sse $\sigma \in (\mu \bullet \phi_{U,Tg})(p)$.

Interpretazioni semantiche (modelli)

Definizione 27. Sia U un universo e T una teoria. Una interpretazione semantica di T in U è una relazione di soddisfacibilità:

$$\cdot \subseteq U \times T$$

tale che:

$\{ \sigma \mid \sigma \cdot p \}$ è un crivello;

$\{ p \mid \sigma \cdot p \}$ è un filtro primo.

Tali condizioni possono essere sviluppate in questo modo:

\leq) $\sigma \cdot p$ e $\sigma' \leq \sigma$ implica $\sigma' \cdot p$;

\emptyset) $\sigma \cdot p$ e $p \notin q$ implica $\sigma \cdot q$;

T) $\sigma \cdot T$;

\wedge) $\sigma \cdot p \wedge q$ sse $\sigma \cdot p$ e $\sigma \cdot q$;

\perp) **Error!** ;

\vee) $\sigma \cdot p \vee q$ sse $\sigma \cdot p$ o $\sigma \cdot q$.

Nota. Si osservi che nel caso T sia una teoria libera allora la condizione \leq) può essere richiesta per i generatori mentre le condizioni \emptyset) - \vee) diventano definienti della relazione di soddisfacibilità per le altre proposizioni.

Proposizione 22. Sia $I(U, T)$ l'insieme delle interpretazioni di T in U . $I(U, T)$ è un bimodulo rappresentabile a destra e a sinistra in termini della coppia di funtori aggiunti $\bullet: T^{op} \longrightarrow U$ e $O: U \longrightarrow T^{op}$.

La proposizione significa che se $\cdot \in I(U, T)$ e $f: U' \longrightarrow U$ allora la relazione \cdot' definita da:

$$\sigma \cdot' p \text{ sse } f(\sigma) \cdot p$$

è una interpretazione semantica di T in U' .

Analogamente se $\cdot \in I(U, T)$ e $\mu: T \longleftarrow T'$ allora la relazione \cdot' definita da:

$$\sigma \cdot' p \text{ sse } \sigma \cdot \mu(p)$$

è una interpretazione sintattica di T' in U .

Sia pertanto $\cdot \subseteq U \times T$ una interpretazione semantica di T in U . Allora

$$(_)^p: OU \longleftarrow T$$

definita da $\sigma \in (q)^p$ sse $\sigma \cdot q$ è una interpretazione sintattica di T in OU .

Analogamente la corrispondenza

$$(_)^r: U \longrightarrow \bullet T$$

definita da $p \in (\sigma)^r$ sse $\sigma \cdot p$ è un morfismo dell'universo U in $\bullet T$.

Inoltre si ha che

$$\psi((_)^p) = (_)^r \quad \text{e} \quad \phi((_)^r) = (_)^p$$

ove ψ e ϕ sono le biiezioni naturali inverse tra loro dell'aggiunzione $O: \bullet$.

Viceversa data una interpretazione sintattica

$$\mu: OU \longleftarrow T$$

(o equivalentemente un morfismo di universi $f: U \longrightarrow \bullet T$)

essa determina una interpretazione \cdot definita da:

$$\sigma \cdot p \text{ sse } \sigma \in \mu(p)$$

($\sigma \cdot p$ sse $p \in f(\sigma)$).

Inoltre μ e $\psi\mu$ (f e ϕf) determinano la stessa interpretazione.

Il teorema del modello generico

Sia U un universo e si consideri la funzione identica

$$I:OU \leftarrow \text{---} OU,$$

ad essa possiamo associare l'unità dell'aggiunzione $O : \bullet$

$$(_) := \psi I: U \longrightarrow \bullet OU$$

definita da:

$$(\underline{\sigma}) = \{ C \mid \sigma \in C \}.$$

Analogamente sia T una teoria e sia I la funzione identica

$$I:\bullet T \longrightarrow \bullet T,$$

ad essa possiamo associare la counità dell'aggiunzione $O : \bullet$

$$(\overline{_}) := \phi I: O \bullet T \leftarrow \text{---} T$$

definita da:

$$(\overline{p}) = \{ \phi \mid p \in \phi \}.$$

L'ultima proposizione mostra che $\bullet T$ è un modello rispetto all'interpretazione

indotta da $(\overline{_})$, ossia dall'interpretazione definita da:

$$\phi . p \quad \text{sse} \quad \phi \in (\overline{p}) \quad \text{sse} \quad p \in \phi.$$

Definizione 28. Diciamo che una proposizione $p \in T$ è valida in una interpretazione \cdot di T in un universo $U = \langle S, \leq \rangle$ sse

$$\text{per ogni } \sigma \in S \quad \sigma . p.$$

Proposizione 23. L'interpretazione $\cdot \in \mathcal{I}(\bullet T, T)$ definita da $\phi \cdot p$ sse $p \in \phi$ è generica rispetto alla validità, nel senso che:

se $p \in T$ allora

per ogni universo U p è valida in ogni interpretazione di T in U

se e solo se

p è valida nell'interpretazione \cdot .

Dimostrazione.

Un lato dell'equivalenza è ovvio.

Per dimostrare l'altra implicazione faremo uso del fatto che $(\bar{\quad})$ è counità dell'aggiunzione $O : \bullet$, in particolare vale l'asserzione:

per ogni T, U e $\mu : OU \leftarrow T$ esiste ed è unico il morfismo tra universi

$f : U \rightarrow \bullet T$ tale che $\mu = (\bar{\quad}) \bullet Of$.

Supponiamo che sia $p \in T$ e per ogni $\phi \in \bullet T$ sia $\phi \cdot p$.

Sia $\cdot \subseteq U \times T$ una interpretazione di T in U , allora $(\bar{\quad})^p : OU \leftarrow T$ è una interpretazione tra universi, pertanto esiste ed è unico il morfismo tra universi $f : U \rightarrow \bullet T$ tale che $(\bar{\quad})^p = (\bar{\quad}) \bullet Of$.

Pertanto $\sigma \cdot p$ sse $\sigma \in (p)^p$ sse $\sigma \in Of((\bar{p}))$ sse $f(\sigma) \in (\bar{p})$ sse $p \in f(\sigma)$ sse $f(\sigma) \cdot p$, condizione sempre vera per ipotesi.

Il teorema di rappresentazione/completezza

Proposizione 24: Teorema di rappresentazione. Ogni teoria geometrica si rappresenta come una algebra di crivelli.

Dimostreremo che il morfismo $(\bar{\quad}) : O \bullet T \leftarrow T$ è iniettivo usando il lemma di estensione/esclusione (proposizione 14) e quindi implicitamente faremo uso dell'assioma di scelta nella forma del lemma di Zorn.

Lemma. Sia T una teoria. Allora

$p \not\vdash q$ sse per ogni $\phi \in \bullet T$ $p \in \phi$ implica che $q \in \phi$.

Un verso dell'implicazione è immediato per le proprietà di un filtro. Viceversa supponiamo che $p \text{ Error! } q$. Allora $\downarrow\{q\} \cap \{p\} = \emptyset$. Poiché $\{p\}$ è una base di filtro possiamo applicare il lemma di estensione\esclusione e concludiamo che esiste $\phi \in \bullet T$ tale che $p \in \phi$ e $\downarrow\{q\} \cap \phi = \emptyset$, cioè esiste $\phi \in \bullet T$ tale che $p \in \phi$ e $q \notin \phi$.

Corollario: Teorema di completezza. Se p è una proposizione valida in ogni modello, allora p è dimostrabile nel senso che $T \vdash p$.

La proposizione p sarà valida in particolare nel modello $\bullet T$, da cui si osserva che per ogni $\phi \in \bullet T$ $T \in \phi$ implica che $q \in \phi$. Applicando il lemma otteniamo $T \vdash p$.

Dimostrazione del teorema.

Supponiamo che $(\overline{p}) = (\overline{q})$. Allora per ogni $\phi \in \bullet T$ $p \in \phi$ implica che $q \in \phi$, da cui $p \not\vdash q$, analogamente per ogni $\phi \in \bullet T$ $q \in \phi$ implica che $p \in \phi$ da cui $q \not\vdash p$.

Capitolo II

Logica lineare

In questo capitolo verrà presentata la logica lineare non solo proponendo le definizioni di teoria proposizionale lineare e teoria proposizionale lineare classica, ma anche dimostrando le proprietà basilari di tali teorie. Il mezzo principale di dimostrazione sarà la relazione di aggiunzione. Poichè le teorie sono particolari categorie è possibile parlare di funtori aggiunti tra teorie. Il teorema di preservazione dei limiti da parte dei funtori aggiunti sarà enunciato per i prodotti e i coprodotti delle teorie ovvero per i massimi minoranti e i minimi maggioranti. Si osserverà pertanto che la maggior parte delle proprietà algebriche della logica lineare dipendono proprio dalla fondamentale relazione di aggiunzione tra la congiunzione lineare e l'implicazione lineare. Tali proprietà verranno poi esemplificate su strutture concrete quali lo spazio di tutte le relazioni su un insieme o l'insieme delle parti delle frecce di una categoria (di un gruppoide nel caso della logica lineare classica). Attraverso questi esempi esplicheremo la differenza tra struttura cartesiana e struttura lineare mettendo in rilievo che nella struttura lineare non sono più necessariamente vere le proprietà strutturali di scambio, contrazione e attenuazione.

Funtori tra preordini e la relazione di aggiunzione

Definizione 1. Sia $f: S_1 \longrightarrow S_2$ un morfismo tra due preordini $\langle S_1, \leq_1 \rangle$, $\langle S_2, \leq_2 \rangle$. Diciamo che f è un funtore se preserva l'ordine, cioè se per ogni $x, y \in S$ vale il seguente assioma:

$$[\text{Funt}_f] \quad x \leq_1 y \text{ implica } f(x) \leq_2 f(y).$$

Diciamo che un funtore $f: S_1 \longrightarrow S_2$ ha un aggiunto destro $g: S_1 \longleftarrow S_2$ (e in tal caso scriviamo $f : g$) se vale il seguente assioma:

$$[f : g] \quad f(x) \leq_2 y \text{ sse } x \leq_1 g(y).$$

In tal caso diciamo anche che f è aggiunto sinistro di g .

Si osservi che se è $f : g$ allora g è un funtore. Sia $x \leq_2 y$. Da $g(x) \leq_1 g(y)$ otteniamo $f(g(x)) \leq_2 x \leq_2 y$ pertanto $g(x) \leq_1 g(y)$.

Esempi.

1. Si considerino rispettivamente gli operatori \diamond e \bullet \odot (possibile nel futuro e necessario nel passato) e gli operatori $\bullet \diamond$ e $\odot \bullet$ (possibile nel passato e necessario nel futuro) del sistema di logica temporale K_t . Valgono le seguenti relazioni:

$$\diamond p \ \emptyset \ q \text{ sse } p \ \emptyset \ \bullet \odot q ;$$

$$\bullet \diamond p \ \emptyset \ q \text{ sse } p \ \emptyset \ \odot \bullet q .$$

2. Si consideri in una algebra di Heyting le funzioni $a \wedge _$ e $a \rightarrow _$. Si osservi che vale la relazione:

$$a \wedge p \ \emptyset \ q \quad \text{sse} \quad p \ \emptyset \ a \rightarrow q.$$

Nota. D'ora in poi tralascieremo di scrivere l'indice alla relazione d'ordine in quanto riteniamo sufficientemente chiaro il contesto in cui ci si muove.

Proposizione 1. Sia $f : g$ una aggiunzione. Allora f preserva arbitrari minimi maggioranti e g preserva arbitrari massimi minoranti.

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che $f(\bigvee_j \{x_j\}) = \bigvee_j \{f(x_j)\}$ cioè (1) $f(\bigvee_j \{x_j\}) \leq \bigvee_j \{f(x_j)\}$ e (2) $f(\bigvee_j \{x_j\}) \geq \bigvee_j \{f(x_j)\}$.

$$(1) \quad f(\bigvee_j \{x_j\}) \leq \bigvee_j \{f(x_j)\} \text{ sse}$$

$$\bigvee_j \{x_j\} \leq g(\bigvee_j \{f(x_j)\}) \text{ sse}$$

$$x_j \leq g(\bigvee_j \{f(x_j)\}) \text{ per ogni } j$$

$$(*) f(x_j) \leq \bigvee_j \{f(x_j)\} \text{ per ogni } j.$$

(*) vale per definizione di minimo maggiorante.

$$(2) \quad \bigvee_j \{f(x_j)\} \leq f(\bigvee_j \{x_j\}) \text{ sse}$$

$$(**) f(x_j) \leq f(\bigvee_j \{x_j\}) \text{ per ogni } j.$$

(**) vale perché $x_j \leq \bigvee_j \{x_j\}$ e f preserva l'ordine.

La dimostrazione che $g(\bigwedge_j \{x_j\}) = \bigwedge_j \{g(x_j)\}$ è duale a quella riportata. Infatti dalla relazione di aggiunzione osserviamo che vale $g(y) \leq_{op} x$ sse $y \leq_{op} f(x)$. Pertanto $g: S_2^{op} \longrightarrow S_1^{op}$ ha per aggiunto destro f e pertanto preserva arbitrari minimi maggioranti di S_2^{op} , cioè arbitrari massimi minoranti.

Proposizione 2. Sia $f : g$ una aggiunzione. Allora $f(\perp) = \perp$ e $g(T) = T$.

Si osservi che $\perp \leq g(\perp)$ e $f(T) \leq T$, da cui $f(\perp) \leq \perp$ e $T \leq g(T)$.

Teorie proposizionali lineari

Definizione 2. Una teoria proposizionale lineare è una decupla $L = \langle P, \emptyset, \top, \wedge, \perp, \vee, \bullet, 1, \backslash, / \rangle$ ove:

- P è un insieme (di proposizioni);
- \emptyset è una relazione binaria (di dimostrabilità) tra proposizioni di P . Tale relazione è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

- $\top \in P$ è un elemento (il vero) che soddisfa il seguente assioma:

$$[\top] p \emptyset \top \text{ per ogni } p \in P.$$

- Per ogni coppia di proposizioni $p, q \in P$ esiste una proposizione $p \wedge q$ (congiunzione di p e q) che soddisfa il seguente assioma:

$$[\wedge] a \emptyset p \wedge q \text{ se e solo se } a \emptyset p \text{ e } a \emptyset q.$$

- $\perp \in P$ è un elemento (il falso) che soddisfa il seguente assioma:

$$[\perp] \perp \emptyset p \text{ per ogni } p \in P.$$

- Per ogni coppia di proposizioni $p, q \in P$ esiste una proposizione $p \vee q$ (disgiunzione di p e q) che soddisfa l'assioma:

$$[\vee] p \vee q \emptyset a \text{ se e solo se } p \emptyset a \text{ e } q \emptyset a.$$

- Per ogni coppia di proposizioni $p, q \in P$ esiste una proposizione $p \bullet q$ (congiunzione lineare di p e q) che soddisfa i seguenti assiomi:

$$[\text{Funt.}\bullet] \text{ Se } p \emptyset q \text{ e } r \emptyset s, \text{ allora } p \bullet r \emptyset q \bullet s.$$

$$[\text{Ass.}\bullet] (p \bullet q) \bullet r = p \bullet (q \bullet r);$$

- Per ogni coppia di proposizioni $p, q \in P$ esistono due proposizioni $p \backslash q$ e q / p che soddisfano i seguenti assiomi:

$$[\backslash] r \bullet p \emptyset q \text{ se e solo se } p \emptyset r \backslash q;$$

$$[/] p \bullet r \emptyset q \text{ se e solo se } p \emptyset q / r.$$

- $1 \in P$ è un elemento (il vero lineare) tale che soddisfa il seguente assioma:

$$[1] p \bullet 1 = p = 1 \bullet p \text{ per ogni } p \in P.$$

Proposizione 3: Teoria lineare duale.

Sia $L = \langle P, \emptyset, T, \wedge, \perp, \vee, \bullet, 1, \backslash, / \rangle$ una teoria lineare.

Si ponga:

$$L^d = \langle P, \emptyset, T, \wedge, \perp, \vee, \bullet_d, 1, \backslash_d, /_d \rangle$$

ove:

$$p \bullet_d q := q \bullet p, \text{ per ogni } p, q \in P;$$

$$\backslash_d := /; /_d := \backslash.$$

Allora L^d è una teoria lineare.

La verifica è immediata ed è lasciata al lettore.

Osservazione. In una teoria lineare oltre alla struttura reticolare è assegnata una congiunzione lineare ovvero un bifuntore nel senso che tale congiunzione è un funtore in ciascun posto. Infatti l'assioma [Funt. \bullet] è equivalente a chiedere che siano veri per ogni $r \in P$ i due seguenti:

$$[\text{Funt}_{r,\bullet}] p \emptyset q \text{ implica } r \bullet p \emptyset r \bullet q;$$

$$[\text{Funt}_{\bullet,r}] p \emptyset q \text{ implica } p \bullet r \emptyset q \bullet r.$$

Tale bifuntore deve avere inoltre aggiunti destri in ciascun posto come mostrato dagli assiomi [N] e [/] che mostrano che per ogni $r \in P$ valgono le seguenti relazioni:

$$[N] \quad r \bullet _ : r \backslash _;$$

$$[/] \quad _ \bullet r : _ / r.$$

Come immediata conseguenza possiamo enunciare la seguente

Proposizione 4. La congiunzione lineare preserva minimi maggioranti arbitrari in ciascun posto, cioè valgono le leggi distributive:

$$r \bullet \bigvee_j \{p_j\} = \bigvee_j \{r \bullet p_j\}, \quad \bigvee_j \{p_j\} \bullet r = \bigvee_j \{p_j \bullet r\}.$$

Inoltre valgono le seguenti leggi distributive dell'aggiunto destro:

$$r \wedge \bigvee_j \{p_j\} = \bigvee_j \{r \wedge p_j\}, \quad \bigwedge_j \{p_j\} / r = \bigwedge_j \{p_j / r\}.$$

Se il reticolo è completo allora vale anche il viceversa, cioè:

Proposizione 5. Ogni bifuntore che soddisfi le due leggi distributive ha aggiunti destri in ciascun posto.

Infatti si ponga rispettivamente:

$$r \backslash q = \bigvee \{ p \mid r \bullet p \in q \}, \quad q / r = \bigvee \{ p \mid p \bullet r \in q \}.$$

Allora da $p \in r \backslash q = \bigvee \{ p \mid r \bullet p \in q \}$ segue che $r \bullet p \in r \bullet \bigvee \{ p \mid r \bullet p \in q \} = \bigvee \{ r \bullet p \mid r \bullet p \in q \} \in q$. Viceversa da $r \bullet p \in q$ segue che $p \in \bigvee \{ p \mid r \bullet p \in q \}$.

Ulteriore struttura richiesta all'insieme di proposizioni di una teoria lineare è quella di monoide per gli assiomi [Ass._•] e [1].

Esempi.

3. Ogni algebra di Heyting è una teoria lineare quando si ponga:

$$\bullet := \wedge, \backslash := \rightarrow, 1 := T.$$

In particolare ogni teoria di crivelli è un'algebra di Heyting. Infatti (proposizione I.15) valgono le leggi distributive infinitarie dell'intersezione rispetto all'unione allora l'intersezione avrà un aggiunto destro \rightarrow . Si osservi allora che vale la seguente catena di equivalenze logiche:

$$\begin{array}{c}
\frac{\sigma \in p \rightarrow q}{\bigwedge \{\sigma\} \emptyset p \rightarrow q} \\
\frac{p \cap \bigwedge \{\sigma\} \emptyset q}{\forall \sigma' \left(\frac{(\sigma' \leq \sigma, \sigma' \in p) \Rightarrow \sigma' \in q}{(\sigma' \in p \Rightarrow \sigma' \in q)} \right)} \\
\frac{\sigma' \leq \sigma \Rightarrow \frac{\sigma' \in p \Rightarrow \sigma' \in q}{\sigma' \in p' \cup q}}{\sigma \in \odot(p' \cup q)}
\end{array}$$

Pertanto $p \rightarrow q = \odot(p' \cup q)$.

4. Le relazioni binarie su un insieme.

Sia I un insieme assegnato. Siano x e y due elementi di I . Scriviamo xRy per asserire che gli elementi $x, y \in I$ stanno nella relazione R .

Denotiamo d'ora in poi l'algebra di Boole di tutte le relazioni su un insieme I con R_I . Tale struttura può essere arricchita nel seguente modo:

Definizione 3. Siano $R, S \in R_I$. Si ponga:

$$x(R \bullet S)y \text{ sse}$$

$$\exists z \text{ tale che } xRz \text{ e } zSy.$$

$$x(R \setminus S)y \text{ sse}$$

$$\forall z \ zRx \text{ implica } zSy.$$

$$x(S/R)y \text{ sse}$$

$$\forall z \ yRz \text{ implica } xSz.$$

$$x1y \text{ sse } x = y.$$

Proposizione 6. $R_I = \langle P(I \times I), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, \bullet, \setminus, / \rangle$ è una teoria proposizionale lineare.

Dimostrazione.

Vale [Funt.], cioè se $R_1 \subseteq S_1$ e $R_2 \subseteq S_2$ allora $R_1 \bullet R_2 \subseteq S_1 \bullet S_2$.

Siano $x(R_1 \bullet R_2)y$, allora $\exists z$ tale che xR_1z e zR_2y , pertanto xS_1z e zS_2y e $x(S_1 \bullet S_2)y$.

Valgono $[\]$ e $[\]$.

$\alpha) R \bullet S \subseteq T$ sse $\beta) S \subseteq R \setminus T$.

Assumiamo $\alpha)$ e dimostriamo $\beta)$.

Sia xSy . Sia z arbitrario tale che zRx , allora $z(R \bullet S)y$ e pertanto zTy . Ma allora $\forall z zRx$ implica zSy e $x(R \setminus T)y$.

Assumiamo $\beta)$ e dimostriamo $\alpha)$.

Sia invece $x(R \bullet S)y$. $\exists z$ tale che xRz e zSy , ma allora $z(R \setminus T)y: \forall w wRz$ implica wTy . In particolare per $w=x$ troviamo che xTy .

La dimostrazione che $R \bullet S \subseteq T$ sse $R \subseteq T/S$ è analoga a quella riportata sopra.

La congiunzione lineare definita soddisfa la proprietà associativa.

$$\begin{aligned}
 & x((R \bullet S) \bullet T)y \text{ sse} \\
 & \exists z \{ x(R \bullet S)z \text{ e } zTy \} \text{ sse} \\
 & \exists z \{ \exists w (xRw \text{ e } wSz) \text{ e } zTy \} \text{ sse} \\
 & \exists z, w \{ xRw \text{ e } wSz \text{ e } zTy \} \text{ sse} \\
 & \exists w \{ xRw \text{ e } \exists z (wSz \text{ e } zTy) \} \text{ sse} \\
 & \exists w \{ xRw \text{ e } w(S \bullet T)y \} \text{ sse} \\
 & x(R \bullet (S \bullet T))y.
 \end{aligned}$$

La relazione 1 è elemento neutro a destra e sinistra rispetto alla congiunzione lineare.

Dimostrazione.

$x(R \bullet 1)y$ sse $\exists z$ tale che xRz e $z1y$ sse $\exists z$ tale che xRz e $z = y$ sse xRy .

Analogamente si prova che $1 \bullet R = R$.

Con ciò la dimostrazione della proposizione è completa.

5. L'insieme potenza delle frecce di una categoria piccola.

Sia C una categoria piccola e sia F l'insieme di tutte le frecce di tale categoria. Denotiamo con $P(F)$ l'insieme potenza di F . Tale insieme è un'algebra di Boole, inoltre possiamo definire le seguenti operazioni:

Definizione 4. Siano $S, D, T \in P_F$. Sia:

$$S \bullet D = \{ \sigma \bullet \delta \mid \sigma \in S, \delta \in D \};$$

$$S \setminus T = \{ \delta \mid \forall \sigma \in S \sigma \bullet \delta \in T \};$$

$$T / D = \{ \sigma \mid \forall \delta \in D \sigma \bullet \delta \in T \};$$

$$1 = \{ I_C \mid C \in C \}.$$

Proposizione 7. $P_F = \langle P(F), \subseteq, F, \cap, \emptyset, \cup, \bullet, 1, \setminus, / \rangle$ è una teoria proposizionale lineare.

La dimostrazione è analoga a quella precedente ed è lasciata al lettore.

Si osservi che l'esempio 4 è un caso particolare dell'esempio 5. Infatti scelto un insieme I possiamo costruire la categoria che ha per oggetti gli elementi di I e per ogni coppia di oggetti esiste una ed una sola freccia. Tale categoria è il preordine totale su I e le sue frecce sono in corrispondenza biunivoca con le coppie $\langle i, j \rangle \in I \times I$. Una tale coppia può essere considerata una freccia che ha per dominio i e per codominio j , mentre una freccia del preordine totale è univocamente individuata dal suo dominio e dal suo codominio.

Osservazioni.

In una teoria proposizionale lineare abbiamo due diverse congiunzioni, la congiunzione cartesiana e la congiunzione lineare e similmente abbiamo due veri, quello cartesiano e quello lineare. Metteremo allora in evidenza quali siano le principali differenze tra struttura cartesiana e struttura lineare.

1. Vale $p \wedge q = q \wedge p$ ma non in generale $p \bullet q = q \bullet p$.

Per osservare ciò si prenda un insieme $I = \{a,b\}$ e si considerino le due relazioni di R_I così definite:

xRy sse $x=a$ e $y = b$,

xSy sse $x=b$ e $y = a$.

Si osservi che $a(R \bullet S)a$ ma non $\exists z aSz$ e zRa , cioè non $a(S \bullet R)a$.

2. Vale $p \wedge p = p$, ma non in generale $p \bullet p = p$.

Possiamo porre la seguente domanda: che cosa significa in R_I che una relazione abbia la proprietà $R \bullet R = R$. Analizziamo dunque i due versi.

(§) $R \bullet R \subseteq R$ sse

$\forall x,y \{ x(R \bullet R)y \text{ implica } xRy \}$ sse

$\forall x,y \{ \exists z (xRz \text{ e } zRy) \text{ implica } xRy \}$ sse

$\forall x,y,z \{ (xRz \text{ e } zRy) \text{ implica } xRy \}$.

Come si vede (§) è equivalente a chiedere che R sia transitiva. Per osservare che (§) non vale sempre basta scegliere una relazione che non sia transitiva. Nell'esempio precedente si ponga $U := R \cup S$ e si osservi che $a(U \bullet U)a$ ma non aUa .

$$\begin{aligned}
& (\S\S) R \subseteq R \bullet R \quad \text{sse} \\
& \forall x,y \{ xRy \text{ implica } x(R \bullet R)y \} \quad \text{sse} \\
& \forall x,y \{ xRy \text{ implica } \exists z (xRz \text{ e } zRy) \}.
\end{aligned}$$

Questa proprietà (che possiamo chiamare "quasi-densità") non è soddisfatta da R nell'esempio precedente.

3. in generale in una teoria lineare non vale la legge distributiva:

$$[D_{\wedge}] p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

mentre valgono :

$$[D_{\bullet}] p \bullet (q \vee r) = (p \bullet q) \vee (p \bullet r)$$

e

$$[\bullet D] (q \vee r) \bullet p = (q \bullet p) \vee (r \bullet p).$$

Si osservi che in R_I $[D_{\wedge}]$ è sempre valida.

Per avere un esempio di teoria lineare ove $[D_{\wedge}]$ non vale si consideri la seguente costruzione.

Sia R un reticolo con elemento massimo T e minimo 1. Si estenda R a R' aggiungendo un nuovo elemento minimo \perp , e si definisca in R' un prodotto \bullet in questo modo:

$$p \bullet q = \begin{cases} \perp & \text{se } p = \perp \text{ o } q = \perp, \\ p \vee q & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri l'operazione così definita:

$$p \setminus q = \begin{cases} T & \text{se } p = \perp, \\ q & \text{se } p \neq \perp \text{ e } p \leq q, \\ \perp & \text{se } p \neq \perp \text{ e non } p \leq q. \end{cases}$$

Si osservi che \setminus è aggiunto destro in ciascun posto di \bullet . Infatti se $p = \perp$ o $q = \perp$ certamente $p \bullet q \leq r$ sse $q \leq p \setminus r$; siano pertanto $p \neq \perp$ e $q \neq \perp$. Allora $p \bullet q \leq r$ sse

$p \vee q \leq r$ sse $p \leq r$ e $q \leq r$, ma da $p \leq r$ segue $p \wedge r = p$, pertanto $q \leq p \wedge r$. Viceversa da $q \leq p \wedge r$ segue che $p \leq r$, infatti se non $p \leq r$ allora $p \wedge r = \perp$ da cui $q = \perp$ contro le ipotesi. Ma allora $q \leq p \wedge r = p$ e pertanto $p \vee q \leq r$ cioè $p \bullet q \leq r$. Si verifica immediatamente che l'operazione \bullet è associativa e ha come elemento neutro 1.

Si consideri allora un qualsiasi reticolo non distributivo R e lo si estenda a R' ; R' rimane un reticolo non distributivo: infatti la corrispondenza così definita:

$$f : R' \longrightarrow R$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \perp, \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è funtoriale e ha come aggiunto sia destro che sinistro la funzione inclusione. Pertanto f preserva \vee, \wedge, T, \perp . Se R' fosse distributivo allora $f(R') = R$ sarebbe distributivo, contro le ipotesi.

Come esempio di reticolo non distributivo si consideri il reticolo G_4 dei sottogruppi del gruppo di ordine 4 non ciclico.

G_4 :

$$\begin{array}{c} T \\ NMO \\ a \quad b \quad c \\ OMN \\ 1 \end{array}$$

G_4' :

$$\begin{array}{c} T \\ NMO \\ a \quad b \quad c \\ OMN \\ 1 \\ M \\ \perp \end{array}$$

Teorie proposizionali lineari classiche

Negazioni lineari

Definizione 5. Sia L una teoria lineare e sia $0 \in P$ un elemento assegnato arbitrario. Si ponga:

$$p^* := p \setminus 0,$$

$${}^*p := 0/p.$$

Osservazione 4. Da $p \not\leq q$ e $q \bullet q \setminus 0 \not\leq 0$ segue che $p \bullet q \setminus 0 \not\leq 0$, cioè $q^* \not\leq p^*$; ciò dimostra che $(_)^*$ è un funtore da L nel reticolo duale L^{op} .

Inoltre $p^* \leq_{op} q$ sse $q \leq p^*$ sse $p \bullet q \leq 0$ sse $p \leq {}^*q$. Pertanto $(_)^*: L \longrightarrow L^{op}$ ha per aggiunto destro ${}^*(_: L^{op} \longrightarrow L$.

Corollario. $(pvq)^* = p^* \wedge q^*$ e $\perp^* = T$, ${}^*(pvq) = {}^*p \wedge {}^*p$ e ${}^*\perp = T$.

Definizione 6. Una teoria proposizionale lineare classica è una coppia $\langle L, 0 \rangle$ ove:

- L è una teoria proposizionale lineare;

- $0 \in P$ è un elemento (il falso lineare) che soddisfa il seguente assioma :

$$[d_0] \quad {}^*(p^*) = p = ({}^*p)^* \text{ per ogni } p \in P.$$

Proposizione 8. Sia $\langle L, 0 \rangle$ una teoria lineare classica. Allora $\langle L^d, 0 \rangle$ è una teoria proposizionale classica e valgono le seguenti relazioni:

$$p^{*d} = {}^*p, \quad {}^{*d}p = p^*.$$

Poniamo pertanto $\langle L, 0 \rangle^d = \langle L^d, 0 \rangle$.

Proposizione 9. $p \perp q$ sse $q^* \perp p^*$.

Sappiamo già (osservazione 4) che $p \perp q$ implica $q^* \perp p^*$; da $q^* \perp p^*$ otteniamo $*(p^*) \perp *(q^*)$ cioè $p \perp q$ perchè 0 è dualizzante.

Corollario. $p \perp q$ sse $*q \perp *p$.

Si osservi che la proposizione precedente vale in tutte le teorie lineari classiche: vale in particolare per quelle duali, cioè vale $p \perp q$ sse $q^{*d} \perp p^{*d}$ che è la proposizione del corollario.

Proposizione 10. $p^* \perp q$ sse $p \perp_{op} *q$.

Infatti $p^* \perp q$ sse $*q \perp *(p^*) = p$ sse $p \perp_{op} *q$.

La proposizione mostra che $*(_):T \longrightarrow T^{op}$ ha per aggiunto sinistro $(_)^*:T \longleftarrow T^{op}$ e pertanto possiamo enunciare il seguente

Corollario. $*(p \wedge q) = *p \vee *q$ e $*T = \perp$.

Considerazioni duali portano a stabilire che $(p \wedge q)^* = p^* \vee q^*$ e $T^* = \perp$.

La disgiunzione lineare

Definizione 7. Sia $\langle L, 0 \rangle$ una teoria lineare classica. Si ponga:

$$p + q := *(q^* \bullet p^*).$$

Proposizione 11. L'operazione $+$ è functoriale.

Infatti $p \perp p'$ e $q \perp q'$ segue $p^* \perp p'^*$ e $q^* \perp q'^*$, pertanto $q'^* \bullet p'^* \perp q^* \bullet p^*$, da cui $*(q^* \bullet p^*) \perp *(q'^* \bullet p'^*)$ cioè $p+q \perp p'+q'$.

Si osservi che tale dimostrazione non dipende dall'assunzione che 0 soddisfa $[d_0]$ cioè sia un elemento dualizzante.

Proposizione 12. $r \in p+q$ sse $*p \bullet r \in q$ sse $r \bullet q^* \in p$.

Infatti $r \in p+q = *(q^* \bullet p^*)$ sse $q^* \bullet p^* \in r^*$ sse $r \bullet q^* \bullet p^* \in 0$ sse $r \bullet q^* \in *(p^*)=p$; da $r \bullet q^* \in p = (*p)^*$ sse $*p \bullet r \bullet q^* \in 0$ sse $*p \bullet r \in *(q^*)=q$.

Abbiamo visto che l'operazione $+$ ha un aggiunto sinistro in ciascun posto - differenze lineari, rispettivamente $*(_) \bullet _$ e $_ \bullet (_)^*$ - possiamo pertanto enunciare il seguente

Corollario. $p+(q \wedge r) = p+q \wedge p+r$, $p+T=T$ e $(q \wedge r)+p = q+p \wedge r+p$, $T+p = T$.

Inoltre l'aggiunzione permette di dimostrare facilmente il seguente

Corollario. $p+q = *p \setminus q = p/q^*$.

La dimostrazione segue dall'unicità degli aggiunti.

Proposizione 13. $(p+q)+r = p+(q+r)$, $p+0=0+p=p$.

La verifica è lasciata al lettore.

Proposizione 14. Sia $\langle L, 0 \rangle$ una teoria lineare classica; allora $\langle \langle P, \emptyset_{op}, \perp, \vee, T, \wedge, +, 0, *(_) \bullet _, _ \bullet (_)^* \rangle, 1 \rangle$ è una teoria classica.

Esempi.

6. Definizione 7. Si consideri la teoria lineare dell'esempio 4 e sia 0 la relazione in R_I così definita:

per ogni $x, y \in I$ $x0y$ sse $x \neq y$.

Proposizione 15. La relazione \emptyset è un elemento ciclico, soddisfa cioè il seguente assioma:

$$p^* = {}^*p \text{ per ogni } p \in P.$$

Infatti xR^*y sse non yRx sse x^*Ry .

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x(R \setminus \emptyset)y & \text{ sse} \\ \forall z zRx \text{ implica } z \neq y & \text{ sse} \\ \forall z z=y \text{ implica non } zRx & \text{ sse} \\ \text{non } yRx; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\emptyset/R)y & \text{ sse} \\ \forall z yRz \text{ implica } x \neq z & \text{ sse} \\ \forall z z=x \text{ implica non } yRz & \text{ sse} \\ \text{non } yRx. & \end{aligned}$$

Proposizione 16. La relazione \emptyset è un elemento dualizzante.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x^*(R^*)y & \text{ sse} \\ \text{non } y(R^*)x & \text{ sse} \\ \text{non}[\text{non } xRy] & \text{ sse} \\ xRy & \end{aligned}$$

Proposizione 17. $x(R+S)y$ sse $\forall z xRz$ o zSy .

Infatti:

$$\begin{aligned} x(R+S)y & \text{ per definizione sse} \\ x^*(S^* \bullet R^*)y & \text{ sse} \end{aligned}$$

$\text{non } y(S^* \bullet R^*)x \quad \text{sse}$
 $\text{non } \exists z yS^*z \text{ e } zR^*x \quad \text{sse}$
 $\forall z \text{ non } (\text{non } zSy \text{ e non } xRz) \quad \text{sse}$
 $\forall z zSy \text{ o } xRz.$

7. Sia C un gruppoide piccolo ossia una categoria piccola ove per ogni freccia f esiste una freccia inversa f^{-1} che soddisfa:

$$f \bullet f^{-1} = I_{\text{dom}(f)}, f^{-1} \bullet f = I_{\text{cod}(f)}.$$

Sia P_F la teoria lineare associata a C come nell'esempio 5.

Definizione 8. Sia $0 = 1'$.

Proposizione 18. L'insieme 0 è un elemento ciclico e dualizzante. Inoltre

$$\phi \in P^* \text{ sse } \phi^{-1} \notin P.$$

Dimostriamo che $P^* = {}^*P$ per ogni $P \in P(F)$.

Error! Error!

Mostriamo allora che vale $(P^*)^* = P$.

$$\begin{array}{c}
 \phi \in P^{**} \\
 \hline
 \phi^{-1} \in P^* \\
 \neg \left(\frac{\phi^{-1} \in P^*}{(\phi^{-1})^{-1} \notin P} \right) \\
 \hline
 \phi \notin P \\
 \hline
 \phi \in P
 \end{array}$$

Proposizione 19. $\phi \in S + D$ sse $\forall \sigma, \delta \phi = \sigma \bullet \delta \Rightarrow (\sigma \in S \text{ o } \delta \in D)$.

Dimostriamo come al solito la proposizione procedendo per equivalenze logiche.

$$\frac{\phi \in S + D = (D^* \bullet S^*)^*}{\frac{\phi^{-1} \in D^* \bullet S^*}{\neg \left(\frac{\frac{\sigma \in S^* \quad \delta \in D^* \quad \phi^{-1} = \delta \bullet \sigma}{\exists \sigma, \delta (\frac{\sigma^{-1} \notin S \quad \delta^{-1} \notin D \quad \phi = \sigma^{-1} \bullet \delta^{-1}}{\sigma \notin S, \delta \notin D})} \right)}}{\frac{\exists \sigma, \delta (\neg(\sigma \in S \text{ o } \delta \in D), \phi = \sigma \bullet \delta)}{\forall \sigma, \delta (\phi = \sigma \bullet \delta \Rightarrow (\sigma \in S \text{ o } \delta \in D))}}$$

Proposizione 20. Nella teoria lineare classica $\langle P_F, 1' \rangle$ valgono sempre le seguenti relazioni:

$$p \wedge p^* \wedge 1 = \perp,$$

$$p + q = (p' \bullet q)'$$

Infatti $\iota \in P \wedge P^* \wedge 1$ sse $\iota \in 1, \iota \in P, \iota^{-1} \notin P$. Ma da $\iota \in 1$ segue che $\iota = \iota^{-1}$, pertanto $\iota \in P \cap P' = \emptyset$.

Si osservi che:

$$\frac{\frac{\frac{\phi \in (S' \bullet D)'}{\neg \exists \sigma, \delta (\frac{\sigma \in S' \quad \delta \in D'}{\sigma \notin S, \delta \notin D}, \phi = \sigma \bullet \delta)}}{\neg(\sigma \in S \text{ o } \delta \in D)}}{\forall \sigma, \delta (\phi = \sigma \bullet \delta \Rightarrow (\sigma \in S \text{ o } \delta \in D))}$$

Per la proposizione 19 allora si ha che : $S + D = (S' \bullet D)'$.

Si osservi infine che l'esempio 6 - analogamente a quanto succedeva per gli esempi 4 e 5 - è un caso particolare dell'esempio 7. Infatti il preordine totale è un gruppoide una volta che si ponga $\langle i, j \rangle^{-1} = \langle j, i \rangle$. La relazione 0 coincide proprio con il complemento della relazione identica.

Capitolo III

Logica lineare distributiva: costruzione degli universi per teorie distributive con un operatore modale binario con aggiunti

Dopo aver dato la definizione di teoria lineare distributiva affronteremo in questo capitolo il seguente problema: esistono universi per tali teorie e se esistono tali universi esiste un modello generico rispetto alla validità? Risponderemo positivamente ad entrambe le domande mostrando che gli usuali universi per la logica geometrica possono essere arricchiti con una relazione ternaria. Infatti poichè il reticolo dei crivelli su un universo è completo allora una congiunzione lineare può essere considerata per la proposizione 5 del secondo capitolo un bimorfismo nella categoria dei reticoli sup-completi e viceversa. Mostriamo che esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra tali bimorfismi e le relazioni ternarie nell'universo che soddisfano certe particolari condizioni di compatibilità con la relazione di specializzazione. In secondo luogo si osserverà che è possibile definire nel modello generico di una teoria con un operatore modale una relazione ternaria canonica in modo tale che la cunità dell'aggiunzione zone-punti preservi anche le operazioni modali. Il modello generico sarà pertanto l'usuale universo dei filtri primi di una teoria con l'aggiunzione di questa relazione ternaria.

Logica lineare distributiva

Definizione 1. Una teoria proposizionale lineare distributiva è una struttura $L = \langle P, \emptyset, \top, \wedge, \perp, \vee, \bullet, 1, \backslash, / \rangle$ ove:

- $\langle P, \emptyset, \top, \wedge, \perp, \vee, \bullet, 1, \backslash, / \rangle$ è una teoria lineare;

- $\langle P, \emptyset, \top, \wedge, \perp, \vee \rangle$ è una teoria geometrica.

Costruzione degli universi

Scopo del lavoro che seguirà sarà quello di dimostrare la fondamentale proposizione 11 che afferma che esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra le possibili congiunzioni lineari in una teoria di crivelli OU e le relazioni ternarie $dec \subseteq S \times S \times S$ che soddisfano le seguenti condizioni di compatibilità:

$\tau dec \sigma \delta$ implica

i) $\tau' \leq \tau$ implica $\tau' dec \sigma \delta$

ii) $\sigma \leq \sigma'$ e $\delta \leq \delta'$ implica $\tau dec \sigma' \delta'$.

Per fare questo dovremo servirci di un armamentario categorico che ci permetta di chiarire le relazioni tra i diversi universi matematici. In particolare ci occuperemo delle categorie **SL**, **PO** e **BM**. Le prime due categorie hanno rispettivamente come oggetti i reticoli completi e gli insiemi parzialmente ordinati mentre i morfismi sono le fusioni che preservano arbitrari minimi maggioranti e quelle che preservano l'ordine. Poichè la terza categoria riveste un ruolo centrale nella nostra semantica - mostreremo nel prossimo capitolo che un universo per la logica lineare distributiva è un monoide in tale categoria - e non siamo a conoscenza di trattazioni

sistematiche relative ad essa abbiamo introdotto in questo capitolo un breve studio di questa categoria.

Proposizione 1. L'insieme dei crivelli OI su un insieme ordinato $\langle I, \leq \rangle$ è oggetto libero rispetto al funtore dimenticante $U: \mathbf{SL} \longrightarrow \mathbf{PO}$.

Dimostrazione.

Sia $\langle I, \leq \rangle$ un insieme ordinato e sia L un semireticolato completo e $f: I \longrightarrow L$ una funzione che preserva l'ordine. Mostriamo che esiste una sola $\phi \in \mathbf{SL}(OI, L)$ tale che $f = \bigwedge \{ _ \} \bullet \phi$.

Supponiamo che tale ϕ esista allora $\phi(C) = \phi(\bigcup_{c \in C} \bigwedge \{c\}) = \bigvee_{c \in C} \phi(\bigwedge \{c\}) = \bigvee_{c \in C} f(c)$.

Mostriamo che tale corrispondenza preserva arbitrari minimi maggioranti.

$\phi(\bigcup_j C_j) = \bigvee_{c \in \bigcup_j C_j} f(c) = \bigvee_{j, c \in C_j} f(c) = \bigvee_j \bigvee_{c \in C_j} f(c) = \bigvee_j \phi(C_j)$.

Ciò dimostra che $\phi \in \mathbf{SL}(OI, L)$.

Pertanto il funtore dimenticante U ha aggiunto sinistro che (per abuso di notazione, in quanto tale funtore non coincide col funtore "zone") denotiamo con $O_ : \mathbf{PO} \longrightarrow \mathbf{SL} : O : U$. Tale proposizione può essere riformulata nel seguente modo:

Proposizione 2. Esiste una biiezione naturale tra i funtori

$$\mathbf{PO}(_, U_): \mathbf{PO}^{\text{op}} \times \mathbf{SL} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

$$\mathbf{SL}(O_ , _): \mathbf{PO}^{\text{op}} \times \mathbf{SL} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Tale corrispondenza biunivoca è data da:

$$\tau: \mathbf{PO}(_, U_) \longrightarrow \mathbf{SL}(O_ , _)$$

$$f \longmapsto \tau f := \tau f(C) = \bigvee_{c \in C} f(c)$$

e dalla sua inversa

$$\tau^{-1}: \mathbf{SL}(O_{-}, _) \longrightarrow \mathbf{PO}(O_{-}, U_{-})$$

$$\phi \quad | \longrightarrow \tau^{-1}\phi := \tau^{-1}\phi(c) = \phi(\hat{\lambda})\{c\}.$$

La categoria **BM** dei bimoduli tra insiemi parzialmente ordinati

Definizione 2. La categoria negli insiemi **BM** è così costituita:

Oggetti: insiemi dotati di una relazione di identità che è un ordine parziale.

Morfismi: relazioni compatibili a sinistra e destra con le relazioni di identità.

Vale a dire che se $R:A \longrightarrow B$ allora R soddisfa

- aRb implica i) $a' \leq a$ implica $a'Rb$
- ii) $b \leq b'$ implica aRb' .

Composizione: è la composizione usuale tra relazioni.

Identità: sono le identità dell'insieme.

Prodotto

Definizione 3.

$$A \otimes B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

$$\langle a, b \rangle \leq \langle a', b' \rangle \text{ sse } a \leq a' \text{ e } b \leq b'.$$

Siano $R:A \longrightarrow B$, $R':A' \longrightarrow B'$, allora

$R \otimes R': A \otimes A' \longrightarrow B \otimes B'$, definita da:

$\langle a, a' \rangle R \otimes R' \langle b, b' \rangle$ sse $a R b$ e $a' R' b'$.

Proposizione 3. La corrispondenza che porta

$$A, B \quad | \longrightarrow A \otimes B$$

$$R, R' \quad | \longrightarrow R \otimes R'$$

definisce un funtore $\otimes: \mathbf{BM} \times \mathbf{BM} \longrightarrow \mathbf{BM}$.

Infatti $I_A \otimes I_B = I_{A \otimes B}$. La verifica è immediata.

Inoltre $(R_1 \bullet R_2) \otimes (S_1 \bullet S_2) = (R_1 \otimes S_1) \bullet (R_2 \otimes S_2)$.

Infatti :

$$\frac{\frac{\frac{\langle a, b \rangle (R_1 \bullet R_2) \otimes (S_1 \bullet S_2) \langle a'', b'' \rangle}{a R_1 \bullet R_2 a'' \quad b S_1 \bullet S_2 b''}}{\exists a' (a R_1 a', a' R_2 a''), \exists b' (b S_1 b', b' S_2 b'')}}{\exists a', b' (\frac{a R_1 a', b S_1 b'}{\langle a, b \rangle R_1 \otimes S_1 \langle a', b' \rangle}, \frac{a' R_2 a'', b' S_2 b''}{\langle a', b' \rangle R_2 \otimes S_2 \langle a'', b'' \rangle})}}{\langle a, b \rangle (R_1 \otimes S_1) \bullet (R_2 \otimes S_2) \langle a'', b'' \rangle}$$

Proposizione 4.

$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$,

Dimostrazione.

Si considerino le frecce:

$\langle \langle a, b \rangle, c \rangle \alpha \langle a', \langle b', c' \rangle \rangle$ sse $a \leq a'$ $b \leq b'$ e $c \leq c'$.

$\langle a', \langle b', c' \rangle \rangle \alpha^{-1} \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ sse $a' \leq a$ $b' \leq b$ e $c' \leq c$.

Allora :

$$\frac{\frac{\langle \langle a, b \rangle, c \rangle \alpha \alpha^{-1} \langle \langle a'', b'' \rangle, c'' \rangle}{\exists a', b', c' (\frac{\langle \langle a, b \rangle, c \rangle \alpha \langle a', \langle b', c' \rangle \rangle}{a \leq a' \quad b \leq b', \quad c \leq c'} , \frac{\langle a', \langle b', c' \rangle \rangle \alpha^{-1} \langle \langle a'', b'' \rangle, c'' \rangle}{a' \leq a, \quad b' \leq b'', \quad c' \leq c''})}}{\frac{\frac{\exists a' (a \leq a' \text{ e } a' \leq a'')}{a \leq a''} , \frac{\exists b' (b \leq b' \text{ e } b' \leq b'')}{b \leq b''} , \frac{\exists c' (c \leq c' \text{ e } c' \leq c'')}{c \leq c''}}{\langle \langle a, b \rangle, c \rangle |_{(A \otimes B) \otimes C} \langle \langle a'', b'' \rangle, c'' \rangle}}$$

Analogamente si mostra che $\alpha^{-1} \bullet \alpha = I_{A \otimes (B \otimes C)}$.

Proposizione 5.

$$A \otimes 1 \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\rho} 1 \otimes A$$

Dimostrazione.

Si considerino le frecce

$$\lambda : A \otimes 1 \longrightarrow A \text{ definita da } \langle a, \bullet \rangle \lambda a' \text{ sse } a \leq a' \text{ e}$$

$$\lambda^{-1} : A \otimes 1 \longleftarrow A \text{ definita da } a \lambda^{-1} \langle a', \bullet \rangle \text{ sse } a \leq a'.$$

Analogamente si definisca ρ e $\rho^{-1} : 1 \otimes A \longleftarrow A$ nel seguente modo:

$$\langle \bullet, a \rangle \rho a' \text{ sse } a \leq a', \quad a \rho^{-1} \langle \bullet, a' \rangle \text{ sse } a \leq a'.$$

Allora:

$$\frac{\frac{\langle a, \bullet \rangle \lambda \bullet \lambda^{-1} \langle a'', \bullet \rangle}{\exists a' \left(\frac{\langle a, \bullet \rangle \lambda a'}{a \leq a'} , \frac{a' \lambda^{-1} \langle a'', \bullet \rangle}{a \leq a''} \right)}}{\frac{a \leq a'' , \frac{\text{vero}}{\bullet \leq \bullet}}{\langle a, \bullet \rangle I_{A \otimes 1} \langle a'', \bullet \rangle}}$$

$$\frac{\frac{a \lambda^{-1} \bullet \lambda a''}{\exists a' \left(\frac{a \lambda^{-1} \langle a', \bullet \rangle}{a \leq a'} , \frac{\langle a', \bullet \rangle \lambda a''}{a \leq a''} \right)}}{\frac{a \leq a''}{a I_{A} a''}}$$

Le proposizioni 3,4,5 sono servite a dimostrare la seguente

Proposizione 6. La categoria **BM** è una categoria monoidale rispetto al prodotto \otimes , all'elemento neutro 1 - insieme ordinato con un solo oggetto - e agli isomorfismi α, λ, ρ .

Il funtore $(_)^{op} : \mathbf{BM} \longrightarrow \mathbf{BM}^{op}$

Definizione 4. Sia $B = \langle I, \leq \rangle$ un oggetto della categoria **BM** e si ponga:

$$B^{op} := \langle I, \leq_{op} \rangle.$$

Sia $R : I \longrightarrow J$ e sia $R^{op} : I^{op} \longleftarrow J^{op}$ definita da:

$$j R^{op} i \text{ sse } i R j.$$

Proposizione 7. L'assegnamento :

$$\begin{array}{ccc} B & & \longrightarrow B^{\text{op}} \\ B \xrightarrow{R} B' & \longrightarrow & B^{\text{op}} \xleftarrow{R^{\text{op}}} B'^{\text{op}} \end{array}$$

definisce un funtore $(_)^{\text{op}}: \mathbf{BM} \longrightarrow \mathbf{BM}^{\text{op}}$.

Infatti $(I_B)^{\text{op}} = I_{B^{\text{op}}}$. Infatti $i(I_B)^{\text{op}}i'$ sse $i'I_Bi$ sse $iI_{B^{\text{op}}}i'$. Inoltre $(R_1 \bullet R_2)^{\text{op}} = R_2^{\text{op}} \bullet R_1^{\text{op}}$. Infatti $i(R_1 \bullet R_2)^{\text{op}}j$ sse $jR_1 \bullet R_2i$ sse $\exists k jR_1k, kR_2i$ sse $\exists k iR_2^{\text{op}}k, kR_1^{\text{op}}j$, sse $iR_2^{\text{op}} \bullet R_1^{\text{op}}j$.

Osservazione 1. Il funtore $(_)^{\text{op}}$ soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} ((_)^{\text{op}})^{\text{op}} &= I_{\mathbf{BM}}; \\ (_ \otimes _)^{\text{op}} &= (_)^{\text{op}} \otimes (_)^{\text{op}}; \\ _ \otimes _ &: (_)^{\text{op}} \otimes _. \end{aligned}$$

La verifica é lasciata al lettore.

Il funtore $O: \mathbf{BM}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{PO}$

Sia I un oggetto della categoria \mathbf{BM} e sia come al solito

$$O_I = \{ C \mid C \subseteq I \text{ e } C \text{ è un crivello } \}.$$

E' immediato osservare che O_I è un oggetto della categoria \mathbf{PO} rispetto all'ordine dato dall'inclusione.

Definizione 5. Sia $R \in \mathbf{BM}(I, J)$. Sia $f_R: O_J \longrightarrow O_I$ definita da:

$$i \in f_R(J) \text{ sse } \exists j \in J \text{ tale che } iRj.$$

Si osservi che da $J \subseteq J'$ segue che $f_R(J) \subseteq f_R(J')$.

Infatti sia $J \subseteq J'$ e sia $i \in f_R(J)$. Allora $\exists j \in J$ tale che iRj , pertanto $j \in J'$ e allora $\exists j \in J'$ tale che iRj , cioè $i \in f_R(J')$. Pertanto $f_R \in \mathbf{PO}(OJ, OI)$.

Proposizione 8. L'assegnamento :

$$\begin{array}{ccc} U & & | \longrightarrow \rightarrow OU \\ U_1 \xleftarrow{R} U_2 & & | \longrightarrow \rightarrow OU_1 \xrightarrow{f_R} OU_2 \end{array}$$

definisce un funtore $O: \mathbf{BM}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{PO}$.

Infatti $f_{IU} = I_{OU}$. Si osservi che $i \in f_{IU}(C)$ sse $\exists j \in C, i \leq j$, sse $i \in C$, perché C è un crivello.

Inoltre $f_{R_1} \bullet f_{R_2} = f_{R_2} \bullet f_{R_1}$. Infatti:

$$\frac{\frac{i \in f_{R_1 \bullet R_2}(C)}{iR_1 \bullet R_2 j}}{\frac{\exists j \in C, \exists j' (iR_1 j', j'R_2 j)}{\exists j, j' (iR_1 j', j'R_2 j, j \in C)}}$$

inoltre:

$$\frac{\frac{i \in f_{R_2 \bullet R_1}(C) = f_{R_1}(f_{R_2}(C))}{j' \in f_{R_2}(C)}}{\frac{\exists j' (\exists j (j \in C, j'R_2 j), iR_1 j')}{\exists j, j' (iR_1 j', j'R_2 j, j \in C)}}$$

Il funtore $U: \mathbf{PO} \longrightarrow \mathbf{BM}^{\text{op}}$

Definizione 6. Sia $f \in \mathbf{PO}(J, I)$. Sia $R_f: I \longrightarrow J$ definita da:

$$iR_f j \quad \text{sse} \quad i \leq f(j).$$

Si osservi che se $iR_f j$ allora $i \leq f(j)$ e da $i' \leq i$ segue $i' \leq f(j)$, pertanto $i'R_f j$ e da $j \leq j'$ segue $f(j) \leq f(j')$, pertanto $i \leq f(j')$, cioè $iR_f j'$. Pertanto $R_f \in \mathbf{BM}(I, J)$.

Proposizione 9. L'assegnamento :

$$U \quad \quad \quad | \longrightarrow \rightarrow U$$

$$U_1 \xrightarrow{f} U_2 \quad | \longrightarrow \quad U_1 \xleftarrow{R_f} U_2$$

definisce un funtore $U: \mathbf{PO} \longrightarrow \mathbf{BM}^{\text{op}}$.

Si osservi che $R_{I_U} = I_U$. Infatti $iR_{I_U} j$ sse $i \leq I(j)$ sse $i \leq j$.

Inoltre $R_{f_1 \bullet f_2} = R_{f_2} \bullet R_{f_1}$.

$$\frac{\frac{iR_{f_2} \bullet R_{f_1} j}{iR_{f_2} j' \quad j'R_{f_1} j}}{\exists j' (i \leq f_2(j'), j' \leq f_1(j))}}{\frac{i \leq f_2(f_1(j)) = f_1 \bullet f_2(j)}{iR_{f_1 \bullet f_2} j}}$$

L'aggiunzione tra il funtore O e il funtore U

Abbiamo mostrato che O e U sono una coppia di funtori tali che:

$$\mathbf{PO} \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \xleftarrow{O} \end{array} \mathbf{BM}^{\text{op}},$$

mostriamo che vale la seguente

Proposizione 10. Il funtore U è aggiunto sinistro del funtore O .

Mostriamo che innanzitutto che:

$$\mathbf{BM}^{\text{op}}(U_P, B) \quad ? \quad \mathbf{PO}(P, O_B).$$

Sia ϕ la corrispondenza che porta

$$P \xleftarrow{R} B \quad | \longrightarrow \quad P \xrightarrow{\phi_R} O_B$$

definita da:

$$b \in \phi_R(p) \quad \text{sse} \quad bRp.$$

Si osservi che se $b \in \phi_R(p)$ e $b' \leq b$, da bRp segue $b'Rp$, pertanto $\phi_R(p)$ è un crivello.

Se $p \leq p'$ allora se $b \in \phi_R(p)$ allora bRp , da cui bRp' , pertanto $b \in \phi_R(p')$ e ciò mostra che $\phi_R(p) \leq \phi_R(p')$.

Sia ψ la corrispondenza che porta

$$P \xrightarrow{f} OB \quad | \longrightarrow \quad P \xleftarrow{\psi_f} B$$

definita da:

$$b\psi_f p \quad \text{sse} \quad b \in f(p).$$

Se $b' \leq b$ e $b\psi_f p$, cioè $b \in f(p)$ segue $b' \in f(p)$ perché $f(p)$ è un crivello, pertanto $b'\psi_f p$.

Se $p \leq p'$ e $b\psi_f p$ allora da $f(p) \subseteq f(p')$ segue che $b \in f(p) \subseteq f(p')$ pertanto $b\psi_f p'$.

Inoltre $\psi = \phi^{-1}$. Infatti:

$$\frac{b \in \phi_{\psi_f}(p)}{b\psi_f p} = \frac{b\psi_{\phi_R}(p)}{b \in \phi_R p} = \frac{b \in \phi_R p}{bRp}$$

Mostriamo che ϕ è una trasformazione naturale nelle due variabili I e J .

Bisogna mostrare pertanto che:

1) $\psi_I: PO(_, OI) \longrightarrow BM^{op}(U_, I)$ è una trasformazione naturale dei funtori

$$PO(_, OI): PO^{op} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

$$BM^{op}(U_, I): PO^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Sia $J' \xrightarrow{f} J$, dobbiamo mostrare che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{PO}(J, OI) & \xrightarrow{\Psi_{J,I}} & \mathbf{BM}^{\text{op}}(J, I) \\
 \downarrow f \bullet _ & & \downarrow R_f \bullet _ \\
 \mathbf{PO}(J', OI) & \xrightarrow{\Psi_{J',I}} & \mathbf{BM}^{\text{op}}(J', I)
 \end{array}$$

Sia $J \xrightarrow{g} OI$, dobbiamo mostrare che $\Psi_{J,I}(f \bullet g) = \Psi_{J',I} g \bullet R_f$.

Infatti:

$$\frac{\frac{j' \Psi_{J',I} g \bullet R_f i}{\exists j \left(\frac{j' \Psi_{J',I} g j}{j' \in g(j)}, j \leq f(i) \right)}}{j' \in g(f(i))}}{j' \Psi_{J,I}(f \bullet g) i}$$

2) $\Psi_J: \mathbf{PO}(J, O_) \longrightarrow \mathbf{BM}^{\text{op}}(UJ, _)$ è una trasformazione naturale dei funtori

$$\mathbf{PO}(J, O_): \mathbf{BM}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

$$\mathbf{BM}^{\text{op}}(UJ, _): \mathbf{BM}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Sia $I' \xrightarrow{R} I$, dobbiamo mostrare che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{PO}(J, OI) & \xrightarrow{\Psi_{J,I}} & \mathbf{BM}^{\text{op}}(J, I) \\
 \downarrow _ \bullet f_R & & \downarrow _ \bullet R \\
 \mathbf{PO}(J, OI') & \xrightarrow{\Psi_{J,I'}} & \mathbf{BM}^{\text{op}}(J, I')
 \end{array}$$

Sia $J \xrightarrow{g} OI$, dobbiamo mostrare che $\Psi_{J,I'}(g \bullet f_R) = R \bullet \Psi_{J,I} g$.

Infatti:

$$\frac{\frac{i' \Psi_{J,I'}(g \bullet f_R) j}{i' \in f_R(g(j))}}{\exists i \left(\frac{i \in g(j)}{i' \Psi_{J,I} g j}, i' R i \right)}}{i' R \bullet \Psi_{J,I} g j}$$

La discussione fino a qui sviluppata è volta a dimostrare la seguente fondamentale

Proposizione 11. Esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra i bimorfismi

$$_ \bullet _ : OI \times OI \longrightarrow OI$$

nella categoria **SL** e i morfismi

$$dec : I^{op} \otimes I^{op} \longrightarrow I^{op}$$

nella categoria **BM**.

Ricordiamo che assegnare un bimorfismo - cioè una funzione f di due variabili tale che $f(a, V_j\{b_j\}) = V_j\{ f(a, b_j) \}$ e $f(V_i\{a_i\}, b) = V_i\{ f(a_i, b) \}$ ma non in generale $f(V_i\{a_i\}, V_j\{b_j\}) = V_{i,j}\{ f(a_i, b_j) \}$ - da $A \times B$ a C è equivalentemente ad assegnare un morfismo di **SL** dal prodotto tensoriale $A \otimes B$ in C . Tale prodotto tensoriale è aggiunto sinistro del funtore interno $SL(_, _) : SL^{op} \times SL \longrightarrow SL$. Ricordiamo ancora che $SL(A, B)$ è il semireticolato completo delle funzioni da A a B con l'ordinamento punto per punto. Per una trattazione particolareggiata di tale problematica si consulti [BN76].

La dimostrazione di tale proposizione può essere ottenuta dalle considerazioni svolte in precedenza ricordando che la composizione di biiezioni naturali è ancora una biiezione naturale. La corrispondenza biunivoca può essere ricavata dalla seguente catena di equivalenze logiche:

$$\begin{array}{c}
\frac{SL(O_- \otimes O_-, O_-)}{SL(O_-, SL(O_-, O_-))} \\
\frac{PO(-, SL(O_-, O_-))}{PO(-, O_-)} \\
\frac{PO(-x_-, O_-)}{BM^{op}(- \otimes -, -)} \\
BM\left(\frac{(- \otimes -)^{op}}{(-)^{op} \otimes (-)^{op}}, (-)^{op}\right)
\end{array}$$

Sia pertanto $\tau_{dec} : OI \otimes OI \longrightarrow OI$. Si definisca la relazione ternaria dec_\bullet nel seguente modo:

$$\tau_{dec_\bullet} \sigma \delta \quad sse \quad \tau \in \hat{\Delta} \{ \sigma \} \bullet \hat{\Delta} \{ \delta \}.$$

Viceversa sia $dec \in BM(I, I \otimes I)$ una relazione ternaria. Si definisca in OI un bifuntore nella seguente maniera.

$$S \bullet_{dec} D = \{ \tau \mid \exists \sigma, \delta (\tau_{dec} \sigma \delta, \sigma \in S, \delta \in D) \}.$$

Si osservi che $\bullet = \bullet_{dec_\bullet}$ e $dec = dec_\bullet_{dec}$.

Infatti:

$$\frac{\tau \in S \bullet_{dec_\bullet} D}{\frac{\tau_{dec_\bullet} \sigma \delta}{\tau \in \hat{\Delta} \{ \sigma \} \bullet \hat{\Delta} \{ \delta \}}, \sigma \in S, \delta \in D)}
\frac{\tau \in \bigcup_{\substack{\sigma \in S \\ \delta \in D}} \hat{\Delta} \{ \sigma \} \bullet \hat{\Delta} \{ \delta \} = \bigcup_{\sigma \in S} \hat{\Delta} \{ \sigma \} \bullet \bigcup_{\delta \in D} \hat{\Delta} \{ \delta \}}{\tau \in S \bullet D}$$

$$\frac{\tau_{dec_\bullet_{dec}} \sigma \delta}{\tau \in \hat{\Delta} \{ \sigma \} \bullet_{dec} \hat{\Delta} \{ \delta \}}
\frac{\exists \sigma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \delta', \frac{\sigma' \in \hat{\Delta} \{ \sigma \}}{\sigma' \leq \sigma}, \frac{\delta' \in \hat{\Delta} \{ \delta \}}{\delta' \leq \delta})}{\tau_{dec} \sigma \delta}$$

Possiamo pertanto dare una definizione di universo per la logica geometrica con un una congiunzione modale con aggiunti destri in ciascun posto. Tale universo sarà pertanto un oggetto U della categoria **BM** insieme con un morfismo $dec:U \longrightarrow U \otimes U$ della categoria. Tali condizioni possono essere esplicitate dicendo che:

Definizione 6. Un universo è una tripla $U = \langle S, \leq, dec \rangle$ ove:

- S è un insieme ordinato dalla relazione \leq .
- dec è una relazione ternaria di decomposizione compatibile con la relazione di \leq , cioè sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$\tau dec \sigma \delta$ implica

- i) $\tau' \leq \tau$ implica $\tau' dec \sigma \delta$
- ii) $\sigma \leq \sigma'$ e $\delta \leq \delta'$ implica $\tau dec \sigma' \delta'$.

Sia U un universo e sia \bullet la congiunzione definita a partire dalla relazione ternaria dell'universo. Abbiamo già visto che l'operatore duale \bullet_d definito da:

$$s \bullet_d d = d \bullet s \text{ per ogni } s, d \in OU$$

ha aggiunti destri in ciascun posto rispettivamente $\setminus_d = /$ e $/_d = \setminus$. Possiamo pertanto associare all'operatore duale un'altra relazione ternaria nell'universo:

$$\frac{\frac{\tau dec \sigma \delta}{\tau \in \langle \bullet \{ \sigma \} \bullet_d \langle \bullet \{ \delta \} \rangle = \langle \bullet \{ \delta \} \bullet \langle \bullet \{ \sigma \} \rangle}}{\exists \delta', \sigma' (\tau dec \delta' \sigma', \delta' \leq \delta, \sigma' \leq \sigma)}}{\tau dec \delta \sigma}$$

Abbiamo già osservato che:

$$s \bullet d = \{ \tau \mid \exists \sigma, \delta (\tau d e c \sigma \delta , \sigma \in s , \delta \in d) \}.$$

Mostriamo che allora che:

$$s \setminus t = \{ \delta \mid \forall \sigma, \tau ((\tau d e c \sigma \delta , \sigma \in s) \Rightarrow \tau \in t) \}.$$

Infatti:

Error!

Inoltre possiamo osservare per dualità che:

$$t/d = \{ \sigma \mid \forall \delta, \tau ((\tau d e c \sigma \delta , \delta \in d) \Rightarrow \tau \in t) \}.$$

Infatti $\sigma \in t/d = d \setminus_d t$ sse $\forall \delta, \tau ((\tau d e c \sigma \delta , \delta \in d) \Rightarrow \tau \in t)$, cioè proprio

$$\forall \delta, \tau ((\tau d e c \sigma \delta , \delta \in d) \Rightarrow \tau \in t).$$

Costruzione del modello generico

Sia $\langle T, \bullet \rangle$ una teoria con operatore modale binario e sia dec una arbitraria relazione ternaria in $\bullet T$ compatibile con la relazione \leq . Sia $\langle O \bullet T, \overline{\bullet} \rangle$ la teoria geometrica con l'operatore modale indotto dalla relazione ternaria. Vogliamo studiare per quali relazioni di decomposizione vale la proprietà della cunità di preservazione dell'operatore:

$$(1) \quad (\overline{p}) \bullet (\overline{q}) = (\overline{p \bullet q}).$$

Proposizione 12. Condizione necessaria affinché valga (1) è che valga:

$$(2) \quad \forall \tau, \sigma, \delta \in \bullet T$$

$$\tau dec \sigma \delta \text{ implica } \tau \supseteq \sigma \otimes \delta$$

ove \otimes è l'usuale prodotto della teoria lineare costruita sull'insieme delle parti di un monoide e definito in questa maniera:

$$S \otimes D = \{ s \bullet d \mid s \in S \text{ e } d \in D \}.$$

Dimostrazione.

Deve essere $(\overline{p}) \bullet (\overline{q}) \subseteq (\overline{p \bullet q})$, cioè:

$\forall p, q, \forall \tau$

$$\frac{\tau \in (\overline{p}) \bullet (\overline{q})}{\exists \sigma, \delta (\tau dec \sigma \delta, \frac{\sigma \in (\overline{p})}{p \in \sigma}, \frac{\delta \in (\overline{q})}{q \in \delta})} \Rightarrow \frac{\tau \in (\overline{p \bullet q})}{p \bullet q \in \tau}$$

cioè:

$\forall \tau, \sigma, \delta$

$$\tau dec \sigma \delta \Rightarrow \frac{\forall p, q ((p \in \sigma \text{ e } q \in \delta) \Rightarrow p \bullet q \in \tau)}{\sigma \otimes \delta \subseteq \tau}.$$

Si osservi che la relazione $dec \subseteq \bullet T \times \bullet T \times \bullet T$ definita da:

$$\tau dec \sigma \delta \text{ sse } \tau \supseteq \sigma \otimes \delta$$

soddisfa le proprietà di compatibilità richieste per la relazione ternaria. Infatti se $\tau \supseteq \sigma \otimes \delta$ da $\tau' \leq \tau$ cioè $\tau' \supseteq \tau$ segue $\tau' \supseteq \sigma \otimes \delta$ e analogamente $\sigma \leq \sigma'$ e $\tau \leq \tau'$ segue che $\sigma \otimes \delta \supseteq \sigma' \otimes \delta'$, pertanto $\tau \supseteq \sigma' \otimes \delta'$.

Proposizione 13. La relazione ternaria $\underline{\supseteq} \otimes \underline{\supseteq}$ definita in $\bullet T$ soddisfa la condizione (1).

Per quanto visto $\underline{\supseteq} \otimes \underline{\supseteq}$ soddisfa (2) dobbiamo mostrare che soddisfa:

$$(3) \overline{(p \bullet q)} \subseteq \overline{(p)} \bullet \overline{(q)} .$$

Lemma. La condizione (3) è equivalente a:

$$(4) \forall p, q, \forall \tau \\ p \bullet q \in \tau \Rightarrow \exists \sigma, \delta (p \in \sigma, q \in \delta \text{ e } \tau \supseteq \sigma \otimes \delta)$$

La dimostrazione è immediata.

La dimostrazione della proposizione consisterà nella dimostrazione del lemma. Poichè enuncieremo alcuni risultati di cui faremo largo uso nel seguito del nostro lavoro li enuncieremo sotto forma di proposizioni.

Proposizione 14. Sia B una base di filtro e sia C un coideale della teoria T . Allora $B \setminus C$ è un coideale (ove \setminus è uno dei due aggiunti di \otimes).

Dimostrazione.

$\perp \in B \setminus C$ sse $\forall b \in B \ b \bullet \perp \in C$ sse falso pochè $T \in B$ e $T \bullet \perp = \perp \notin C$.

Sia $p \in B \setminus C$ e sia $p \not\in q$. Allora $\forall b \in B \ b \bullet q \not\in b \bullet q$ pertanto $b \bullet q \in C$.

Sia $p \vee q \in B \setminus C$ e supponiamo che $p \notin B \setminus C$ e $q \notin B \setminus C$. Pertanto $\exists b \in B$ t.c. $b \bullet p \notin C$ e $\exists b' \in B$ t.c. $b' \bullet q \notin C$. Poichè $\exists b'' \in B \ b'' \not\in b \wedge b'$ segue che $b'' \bullet (p \vee q) \not\in$

$(b \wedge b') \bullet (p \vee q) = ((b \wedge b') \bullet p) \vee ((b \wedge b') \bullet q) \notin b \bullet p \vee b' \bullet q$, ma per ipotesi $b'' \bullet (p \wedge q) \in C$ allora $b \bullet p \vee b' \bullet q \in C$, pertanto o $b \bullet p \in C$ o $b' \bullet q \in C$: assurdo.

Per dualità otteniamo che:

Sia B una base di filtro e sia C un coideale della teoria T . Allora C/B è un coideale.

Proposizione 15. $\forall p, q \in T, \forall \tau \in \bullet T$

$$p \bullet q \in \tau \Rightarrow \exists \sigma, \delta (p \in \sigma, q \in \delta \text{ e } \tau \supseteq \sigma \otimes \delta).$$

$p \bullet q \in \tau$ sse $\{p\} \otimes \{q\} \subseteq \tau$ sse $\{q\} \subseteq \{p\}^{\setminus \tau}$ sse (*) $(\{p\}^{\setminus \tau})^c \cap \{q\} = \emptyset$. Siamo in grado di applicare il lemma di estensione esclusione, pertanto (*) sse $\exists \delta q \in \delta$ e $\delta \subseteq \{p\}^{\setminus \tau}$, cioè (**) $\{p\} \otimes \delta \subseteq \tau$. La (**) è equivalente a $\{q\} \subseteq \delta^{\setminus \tau}$, le ipotesi del lemma sono ancora verificate, pertanto la (**) sse $\exists \sigma q \in \sigma$ e $\sigma \otimes \delta \subseteq \tau$.

Morfismi di universi, interpretazioni sintattiche, interpretazioni semantiche

Chiederemo che un morfismo tra universi preservi anche la relazione ternaria, ovvero se $f:U_1 \longrightarrow U_2$, chiederemo che sia

$$(1) \tau dec \sigma \delta \Rightarrow f(\tau) dec f(\sigma) f(\delta).$$

Chiederemo di conseguenza che le interpretazioni sintattiche semipreservino la congiunzione binaria, se $\mu:T_1 \longleftarrow T_2$ allora:

$$(2) \mu(s) \bullet \mu(d) \emptyset \mu(s \bullet d).$$

Infatti nel caso che $\mu = Of:OU_1 \longleftarrow OU_2$ le condizioni (1) e (2) sono equivalenti.

Si osservi la condizione (2) è equivalente alle seguenti:

$$(3) \mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(t), \quad (3') \mu(t/d) \emptyset \mu(t) / \mu(d).$$

Infatti se vale (2) allora otteniamo $\mu(s) \bullet \mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s \bullet s \setminus t) \emptyset \mu(t)$ cioè $\mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(t)$. Viceversa se vale (3) da $s \bullet d \emptyset s \bullet d$ otteniamo $d \emptyset s \setminus s \bullet d$, pertanto $\mu(d) \emptyset \mu(s \setminus s \bullet d) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(s \bullet d)$, pertanto $\mu(s) \bullet \mu(d) \emptyset \mu(s \bullet d)$.

Per quanto riguarda le interpretazioni semantiche chiederemo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

-) $\exists \sigma, \delta (\sigma . s , \delta . d , \tau dec \sigma \delta)$ implica $\tau . s \bullet d$;
- \) $\delta . s \setminus t$ implica $\forall \sigma, \tau ((\tau dec \sigma \delta , \sigma . s) \Rightarrow \tau . t)$;
- /) $\sigma . t/d$ implica $\forall \delta, \tau ((\tau dec \sigma \delta , \delta . d) \Rightarrow \tau . t)$;

Si osservi che la condizione •) è equivalente a chiedere che l'interpretazione sintattica $(_)^p$ semipreservi l'operatore modale e il morfismo tra universi $(_)^r$ preservi la relazione ternaria.

Infatti se . è una interpretazione semantica allora:

$$\frac{\forall s,d (s)^P \bullet (d)^P \emptyset (s \bullet d)^P}{\forall s,d \forall \tau \left(\frac{\tau \in (s)^P \bullet (d)^P}{\exists \sigma, \delta \left(\frac{\sigma \in (s)^P}{\sigma \cdot s}, \frac{\delta \in (d)^P}{\delta \cdot d}, \tau dec \sigma \delta \right)} \Rightarrow \frac{\tau \in (s \bullet d)^P}{\tau \cdot s \bullet d} \right)}$$

$$\frac{\forall \tau, \sigma, \delta (\tau dec \sigma \delta \Rightarrow \forall s, d \left(\left(\frac{\sigma \cdot s}{s \in (\sigma)^r}, \frac{\delta \cdot d}{d \in (\delta)^r} \right) \Rightarrow \frac{\tau \cdot s \bullet d}{s \bullet d \in (\tau)^r} \right))}{(\tau)^r \supseteq (\sigma)^r \otimes (\delta)^r}$$

Pertanto il bimodulo delle interpretazioni sarà ancora rappresentabile a destra e a sinistra attraverso i funtori aggiunti zone e punti.

Diamo la dimostrazione delle corrispondenze sintattico-semantiche tra la proprietà di preservazione della relazione ternaria e quella di semipreservazione della congiunzione.

Proposizione 16. La proprietà di semipreservazione:

$$Of(s) \bullet Of(d) \emptyset Of(s \bullet d)$$

è valida tra due teorie di crivelli $OU_2 \text{ } OU_1$ sse $f:U_1 \longrightarrow U_2$ preserva la relazione ternaria:

$$\tau dec \sigma \delta \Rightarrow f(\tau) dec f(\sigma) f(\delta).$$

Dimostrazione.

$\forall s,d \forall \tau$

$$\frac{\tau \in Of(s) \bullet Of(d)}{\exists \sigma, \delta \left(\tau dec \sigma \delta, \frac{\sigma \in Of(s)}{f(\sigma) \in s}, \frac{\delta \in Of(d)}{f(\delta) \in d} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau \in Of(s \bullet d)}{\frac{f(\tau) \in s \bullet d}{\exists \sigma', \delta' \left(f(\tau) dec \sigma' \delta', \sigma' \in s, \delta' \in d \right)}}$$

equivalentemente:

$\forall \tau, \sigma, \delta$

$$\tau \text{ dec } \sigma \delta \Rightarrow$$

$$\forall s, d ((f(\sigma) \in s, f(\delta) \in d) \Rightarrow \exists \sigma', \delta' (f(\tau) \text{ dec } \sigma' \delta', \sigma' \in s, \delta' \in d))$$

Ma il conseguente è equivalente a:

$$\exists \sigma', \delta' (f(\tau) \text{ dec } \sigma' \delta', \sigma' \in \hat{\Delta} \{f(\sigma)\}, \delta' \in \hat{\Delta} \{f(\delta)\})$$

a sua volta equivalente a :

$$f(\tau) \text{ dec } f(\sigma) f(\delta).$$

Proposizione 17. La proprietà di preservazione della relazione ternaria:

$$\tau \text{ dec } \sigma \delta \Rightarrow \mu^\bullet(\tau) \text{ dec } \mu^\bullet(\sigma) \mu^\bullet(\delta).$$

è valida tra due universi di filtri primi $\bullet T_1, \bullet T_2$ sse $\mu: T_1 \leftarrow \text{---} T_2$

semipreserva la congiunzione:

$$\mu(s) \bullet \mu(d) \in \mu(s \bullet d).$$

La condizione proposta è:

$\forall \tau, \sigma, \delta$

$$\tau \supseteq \sigma \otimes \delta \Rightarrow \mu^\bullet(\tau) \supseteq \mu^\bullet(\sigma) \otimes \mu^\bullet(\delta).$$

Il conseguente è equivalente a

$$\forall s, d ((\frac{s \in \mu^\bullet(\sigma)}{\mu(s) \in \sigma}, \frac{d \in \mu^\bullet(\delta)}{\mu(d) \in \delta}) \Rightarrow \frac{s \bullet d \in \mu^\bullet(\tau)}{\mu(s \bullet d) \in \tau})$$

pertanto il tutto può essere riletto nella seguente forma:

$\forall s, d \forall \tau$

$$\exists \sigma, \tau (\tau \supseteq \sigma \otimes \delta, \mu(s) \in \sigma, \mu(d) \in \delta) \Rightarrow \mu(s \bullet d) \in \tau.$$

Per la proposizione 15 l'antecedente è equivalente a:

$$\mu(s) \bullet \mu(d) \in \tau,$$

petanto la condizione globale è:

$$\forall s, d \forall \tau (\mu(s) \bullet \mu(d) \in \tau \Rightarrow \mu(s \bullet d) \in \tau)$$

e applicando il lemma di estensione\esclusione otteniamo :

$$\forall s, d \quad \mu(s) \bullet \mu(d) \quad \emptyset \quad \mu(s \bullet d) \quad .$$

Capitolo IV

Logica lineare distributiva: studio delle proprietà monoidali della congiunzione lineare

In questo capitolo investigheremo le corrispondenze tra sintassi e semantica relative alla struttura monoidale imposta alle teorie lineari dagli assiomi [Ass.] e [1] (capitolo II, definizione 2). Il metodo seguito in questa analisi consiste nel mostrare che la validità di tali assiomi in una teoria di crivelli è equivalente alla validità di certe condizioni semantiche nell'universo. Tuttavia questo è un lavoro parziale: non garantisce infatti che se in tutti i modelli di una teoria T vale la condizione semantica trovata allora l'assioma equivalente è valido in T . L'altra parte del lavoro consisterà in un percorso inverso dalla semantica alla sintassi: si mostrerà che la validità della condizione semantica nel modello generico è equivalente alla validità sintattica degli assiomi indagati. Si osservi che la ricerca può eventualmente avere il suo avvio sia da una condizione sintattica sia da una condizione semantica. Le condizioni semantiche così trovate mostrano che gli universi per teorie lineari distributive sono tutti e soli i monoidi nella categoria dei bimoduli su insiemi parzialmente ordinati. Vedremo infine come gli esempi portati nel capitolo secondo siano riconducibili a questi universi e come esempi più complessi di tali strutture possano essere costruiti servendosi degli oggetti nella categoria dei monoidi nei prefasci.

Studio delle proprietà del monoide

Dalla sintassi alla semantica

Proposizione 1. La proprietà associativa del tensore

$$(s \bullet c) \bullet d = s \bullet (c \bullet d)$$

è valida in una teoria di crivelli OU sse vale in U la seguente proposizione:

$$\exists \zeta (\tau_{dec} \zeta \delta \text{ e } \zeta_{dec} \sigma \gamma) \text{ sse } \exists \xi (\tau_{dec} \sigma \xi \text{ e } \xi_{dec} \gamma \delta).$$

Dimostrazione.

$$\forall s, c, d \frac{(s \bullet c) \bullet d \not\equiv s \bullet (c \bullet d)}{\forall \tau \tau \in (s \bullet c) \bullet d \Rightarrow \tau \in s \bullet (c \bullet d)}$$

e per le seguenti equivalenze:

$$\frac{\frac{\tau \in (s \bullet c) \bullet d}{\zeta \in (s \bullet c)}}{\exists \zeta, \delta (\tau_{dec} \zeta \delta , \exists \sigma, \gamma (\zeta_{dec} \sigma \gamma , \sigma \in s , \gamma \in c) , \delta \in d)}$$

$$\frac{\exists \zeta, \sigma, \gamma, \delta (\tau_{dec} \zeta \delta , \zeta_{dec} \sigma \gamma , \sigma \in s , \gamma \in c , \delta \in d)}{\tau \in (s \bullet c) \bullet d}$$

$$\frac{\tau \in s \bullet (c \bullet d)}{\xi \in (c \bullet d)}}{\exists \sigma', \xi (\tau_{dec} \sigma' \xi , \sigma' \in s , \exists \gamma', \delta' (\xi_{dec} \gamma' \delta' , \gamma' \in c , \delta' \in d))}$$

$$\frac{\exists \xi, \sigma', \gamma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \xi , \xi_{dec} \gamma' \delta' , \sigma' \in s , \gamma' \in c , \delta' \in d)}{\tau \in s \bullet (c \bullet d)}$$

otteniamo:

$$\forall s, c, d \forall \tau ($$

$$\exists \zeta, \sigma, \gamma, \delta (\tau_{dec} \zeta \delta , \zeta_{dec} \sigma \gamma , \sigma \in s , \gamma \in c , \delta \in d) \Rightarrow$$

$$\exists \xi, \sigma', \gamma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \xi , \xi_{dec} \gamma' \delta' , \sigma' \in s , \gamma' \in c , \delta' \in d)) ,$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \forall \tau, \sigma, \gamma, \delta (\\ \exists \zeta (\tau_{dec} \zeta \delta , \zeta_{dec} \sigma \gamma) \Rightarrow \\ \forall s, c, d ((\sigma \in s , \gamma \in c , \delta \in d) \Rightarrow \\ \exists \xi, \sigma', \gamma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \xi , \xi_{dec} \gamma' \delta' , \sigma' \in s , \gamma' \in c , \delta' \in d)) , \end{aligned}$$

ma il conseguente è equivalente a:

$$\exists \xi (\tau_{dec} \sigma \xi , \xi_{dec} \gamma \delta).$$

Infatti :

$$\begin{aligned} \forall s, c, d ((\frac{\sigma \in s}{\Diamond \{ \sigma \} \emptyset s} , \frac{\gamma \in c}{\Diamond \{ \gamma \} \emptyset c} , \frac{\delta \in d}{\Diamond \{ \delta \} \emptyset d}) \\ \Rightarrow \exists \xi, \sigma', \gamma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \xi , \xi_{dec} \gamma' \delta' , \sigma' \in s , \gamma' \in c , \delta' \in d)) , \end{aligned}$$

ma si osservi che è sufficiente chiedere che il conseguente sia verificato per i più piccoli crivelli soddisfacenti l'antecedente. Pertanto la condizione è equivalente a:

$$\frac{\exists \xi, \sigma', \gamma', \delta' (\tau_{dec} \sigma' \xi , \xi_{dec} \gamma' \delta' , \frac{\sigma' \in \Diamond \{ \sigma \}}{\sigma' \leq \sigma} , \frac{\gamma' \in \Diamond \{ \gamma \}}{\gamma' \leq \gamma} , \frac{\delta' \in \Diamond \{ \delta \}}{\delta' \leq \delta})}{\exists \xi (\tau_{dec} \sigma \xi , \xi_{dec} \gamma \delta)}$$

Pertanto la condizione equivalente è:

$$\begin{aligned} \forall \tau, \sigma, \gamma, \delta \\ \exists \zeta (\tau_{dec} \zeta \delta , \zeta_{dec} \sigma \gamma) \Rightarrow \exists \xi (\tau_{dec} \sigma \xi , \xi_{dec} \gamma \delta). \end{aligned}$$

Si osservi che la condizione:

$$s \bullet (c \bullet d) \emptyset (s \bullet c) \bullet d$$

è equivalente a:

$$(d \bullet_d c) \bullet_d s \emptyset d \bullet_d (c \bullet_d s)$$

nella teoria lineare duale pertanto a

$$\begin{aligned} \forall \tau, \sigma, \gamma, \delta \\ \exists \zeta (\tau_{dec_d} \zeta \delta , \zeta_{dec_d} \sigma \gamma) \Rightarrow \exists \xi (\tau_{dec_d} \sigma \xi , \xi_{dec_d} \gamma \delta) , \end{aligned}$$

cioè:

$$\exists \zeta (\tau_{dec} \delta \zeta , \zeta_{dec} \sigma) \Rightarrow \exists \xi (\tau_{dec} \xi \sigma , \xi_{dec} \delta \gamma).$$

Possiamo pertanto concludere che

$$\forall \tau, \sigma, \gamma, \delta$$

$$\exists \zeta (\tau_{dec} \zeta \delta , \zeta_{dec} \sigma \gamma) \text{ sse } \exists \xi (\tau_{dec} \xi \sigma , \xi_{dec} \gamma \delta).$$

Proposizione 2. La proprietà dell'elemento neutro

$$s \bullet 1 = s$$

è valida in una teoria di crivelli OU sse vale in U la seguente proposizione:

$$\exists \iota (\tau_{dec} \iota \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \sigma.$$

Dimostrazione.

$$\frac{\forall s \frac{\frac{s \bullet 1 \in s}{\tau \in s \bullet 1}}{\forall \tau (\exists \sigma, \iota (\tau_{dec} \iota \sigma , \sigma \in s , \iota \in 1) \Rightarrow \tau \in s)}}{\forall \tau, \sigma (\exists \iota (\tau_{dec} \iota \sigma , \iota \in 1) \Rightarrow \forall s (\sigma \in s \Rightarrow \tau \in s))}}$$

Si ossevi che il conseguente è equivalente a:

$$\tau \leq \sigma.$$

Infatti:

$$\frac{\forall s (\frac{\sigma \in s}{\sigma \in \{ \sigma \} \in s} \Rightarrow \tau \in s)}{\frac{\tau \in \{ \sigma \}}{\tau \leq \sigma}}$$

Otteniamo pertanto:

$$\exists \iota (\tau_{dec} \iota \text{ e } \iota \in 1) \Rightarrow \tau \leq \sigma.$$

Viceversa analizziamo l'altra parte dell'uguaglianza.

$$\frac{\forall s \frac{s \leq s \bullet 1}{\sigma \in s \bullet 1}}{\forall \sigma (\sigma \in s \Rightarrow \exists \sigma', \iota (\sigma \text{dec} \sigma' \iota , \sigma' \in s , \iota \in 1))}$$

$$\frac{\forall s (\frac{\sigma \in s}{\Delta \{ \sigma \} \leq s} \Rightarrow \exists \sigma', \iota (\sigma \text{dec} \sigma' \iota , \sigma' \in s , \iota \in 1))}{\forall \sigma \frac{\exists \sigma', \iota (\sigma \text{dec} \sigma' \iota , \frac{\sigma' \in \Delta \{ \sigma \} }{\sigma' \leq \sigma} , \iota \in 1)}{\exists \iota (\sigma \text{dec} \sigma \iota , \iota \in 1)}}$$

Otteniamo pertanto:

$$\exists \iota (\sigma \text{dec} \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1)$$

che è equivalente a:

$$\tau \leq \sigma \Rightarrow \exists \iota (\tau \text{dec} \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1).$$

Proposizione 3. La proprietà dell'elemento neutro

$$1 \bullet s = s$$

è valida in una teoria di crivelli OU sse vale nell'universo U la seguente proposizione:

$$\exists \iota (\tau \text{dec} \iota \delta \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \delta.$$

Dimostrazione.

Si osservi che $1 \bullet s = s$ sse vale nella teoria duale $s \bullet_d 1 = s$ per ogni s cioè se vale nell'universo U $\exists \iota (\tau \text{dec}_d \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1)$ sse $\tau \leq \sigma$ per ogni σ, τ , cioè:

$$\exists \iota (\tau \text{dec} \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \sigma.$$

Dalla semantica alla sintassi

Proposizione 4. La proprietà della relazione di decomposizione

$$\exists \zeta (\tau_{dec} \zeta \delta \text{ e } \zeta_{dec} \sigma \gamma) \text{ sse } \exists \xi (\tau_{dec} \sigma \xi \text{ e } \xi_{dec} \gamma \delta)$$

è valida in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse è valido nella teoria T la proprietà associativa:

$$(s \bullet c) \bullet d = s \bullet (c \bullet d) .$$

Dimostrazione.

Dimostriamo innanzitutto che:

$$\forall \tau, \sigma, \gamma, \delta$$

$$\exists \zeta (\tau \supseteq \zeta \otimes \delta \text{ e } \zeta \supseteq \sigma \otimes \gamma) \text{ implica } \exists \xi (\tau \supseteq \sigma \otimes \xi \text{ e } \xi \supseteq \gamma \otimes \delta)$$

sse:

$$\forall s, c, d$$

$$(s \bullet c) \bullet d \in s \bullet (c \bullet d) .$$

Si osservi che:

$$\exists \zeta (\tau \supseteq \zeta \otimes \delta \text{ e } \zeta \supseteq \sigma \otimes \gamma) \text{ sse } \tau \supseteq (\sigma \otimes \gamma) \otimes \delta \text{ e analogamente}$$

$$\exists \xi (\tau \supseteq \sigma \otimes \xi \text{ e } \xi \supseteq \gamma \otimes \delta) \text{ sse } \tau \supseteq \sigma \otimes (\gamma \otimes \delta) .$$

Dimostriamo la prima delle due equivalenze concentrandoci sulla implicazione non ovvia.

Da $(\sigma \otimes \gamma) \otimes \delta \subseteq \tau$ segue che $\sigma \otimes \gamma \subseteq \tau / \delta$. τ / δ è un coideale (proposizione III.14) e $\sigma \otimes \gamma$ è una base di filtro. Infatti se $s_j \bullet d_j \in \sigma \otimes \gamma$ per $j=1 \dots n$ ed $n \geq 0$ allora da $(s_1 \wedge \dots \wedge s_n) \bullet (d_1 \wedge \dots \wedge d_n) \in s_j \bullet d_j$ per $j=1 \dots n$ segue che $(s_1 \wedge \dots \wedge s_n) \bullet (d_1 \wedge \dots \wedge d_n) \in s_1 \bullet d_1 \wedge \dots \wedge s_n \bullet d_n$. Possiamo allora applicare il lemma di estensione/esclusione e asserire che $\exists \zeta$ tale che $\sigma \otimes \gamma \subseteq \zeta$ e $\zeta \subseteq \tau / \delta$, cioè $\zeta \otimes \delta \subseteq \tau$.

Pertanto:

$$\forall \tau, \sigma, \gamma, \delta$$

Error!

L'ultima condizione può essere riletta nel seguente modo:

$$\forall \tau \forall s, c, d$$

$$\frac{\frac{\exists \sigma, \gamma, \delta (\tau \supset (\sigma \otimes \gamma) \otimes \delta \wedge s \in \sigma, c \in \gamma, d \in \delta, s \bullet (c \bullet d) \notin \tau)}{\exists \sigma, \gamma, \delta (\tau \supset (\sigma \otimes \gamma) \otimes \delta \wedge s \in \sigma, c \in \gamma, d \in \delta)} \Rightarrow \text{assurdo}}{(*) \frac{(s \bullet c) \bullet d \in \tau, s \bullet (c \bullet d) \notin \tau}{(s \bullet c) \bullet d \in \tau \Rightarrow s \bullet (c \bullet d) \in \tau}}$$

L'equivalenza a (*) viene dimostrata nel solito modo usando la proposizione III.14 e applicando più volte il L.E.E. La condizione fino a qui trovata si dimostra equivalente a:

$$\forall s, c, d \quad (s \bullet c) \bullet d \notin s \bullet (c \bullet d)$$

servendosi ancora del lemma di estensione\esclusione.

Si consideri la condizione seguente:

$$\forall \tau, \sigma, \gamma, \delta$$

$$\exists \xi (\tau \supset \sigma \otimes \xi \text{ e } \xi \supset \gamma \otimes \delta) \text{ implica } \exists \zeta (\tau \supset \zeta \otimes \delta \text{ e } \zeta \supset \sigma \otimes \gamma).$$

Essa è equivalente a:

$$\forall \tau, \sigma, \gamma, \delta$$

$$\exists \xi (\tau \supset \xi \otimes_d \sigma \text{ e } \xi \supset \delta \otimes_d \gamma) \text{ implica } \exists \zeta (\tau \supset \delta \otimes_d \zeta \text{ e } \zeta \supset \gamma \otimes_d \sigma),$$

pertanto è equivalente a

$$\forall s, c, d$$

$$(s \bullet_d c) \bullet_d d \notin s \bullet_d (c \bullet_d d)$$

cioè

$$\forall s, c, d$$

$$d \bullet (c \bullet s) \notin (d \bullet c) \bullet s.$$

Con ciò la proposizione è completamente dimostrata.

Proposizione 5. La proprietà dell'elemento neutro

$$\exists \iota (\tau \supseteq \sigma \otimes \iota \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \sigma.$$

è valida in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale in T la seguente proposizione:

$$s \bullet 1 = s .$$

Dimostrazione.

$$\forall \tau, \sigma (\text{Error!})$$

cioè:

$$\forall \tau \frac{\exists s \exists \iota, \sigma (\tau \supseteq \sigma \otimes \iota , \iota \in 1 , s \in \sigma , s \notin \tau)}{\exists s (\frac{\exists \iota, \sigma (\tau \supseteq \sigma \otimes \iota , \iota \in 1 , s \in \sigma)}{s \bullet 1 \in \tau} , s \notin \tau)} \Rightarrow \text{assurdo}$$

equivalentemente:

$$\forall \tau \forall s$$

$$s \bullet 1 \in \tau \Rightarrow s \in \tau$$

e applicando il lemma L.E.E.:

$$\forall s$$

$$s \bullet 1 \notin s .$$

La condizione inversa è equivalente a:

$$\forall \sigma \exists \iota (\sigma \supseteq \sigma \otimes \iota \text{ e } \iota \in 1)$$

ossia:

$$\forall \sigma \sigma \supseteq \sigma \otimes \{1\}, \text{ cioè}$$

$$\forall s \forall \sigma (s \in \sigma \Rightarrow s \bullet 1 \in \sigma)$$

sse:

$$\forall s$$

$$s \notin s \bullet 1 .$$

Proposizione 6. La proprietà dell'elemento neutro

$$\exists \iota (\tau \supseteq \delta \otimes \iota \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \delta .$$

è valida in un universo di filtri primi •T sse vale in T la seguente proposizione:

$$1 \bullet d = d .$$

Otteniamo la dimostrazione per dualità.

Universi per la logica lineare distributiva

Definizione 1. Un universo per la logica lineare distributiva è una quadrupla:

$$U = \langle S, \leq, dec, 1 \rangle \text{ ove}$$

- S è un insieme,

- \leq è una relazione d'ordine,

- dec è una relazione ternaria di decomposizione compatibile con l'ordine:

$$\begin{aligned} \tau dec \sigma \delta \text{ implica :} \quad & \text{i) } \tau' \leq \tau \Rightarrow \tau' dec \sigma \delta, \\ & \text{ii) } \sigma \leq \sigma' \text{ e } \delta \leq \delta' \Rightarrow \tau dec \sigma' \delta'. \end{aligned}$$

Tale relazione soddisfa l'assioma di associatività:

$$[Ass_{dec}] \quad \exists \zeta (\tau dec \zeta \delta \text{ e } \zeta dec \sigma \gamma) \text{ sse } \exists \xi (\tau dec \sigma \xi \text{ e } \xi dec \gamma \delta)$$

- 1 è un insieme chiuso rispetto all'ordine:

$$\iota \in 1 \text{ e } \iota' \leq \iota \Rightarrow \iota' \in 1.$$

1 è soddisfa i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned} [dec1] \quad \forall \tau, \sigma \quad \tau dec \iota \text{ e } \iota \in 1 &\Rightarrow \tau \leq \sigma; & \forall \sigma \quad \exists \iota \in 1 \quad \sigma dec \iota; \\ [1_{dec}] \quad \forall \tau, \delta \quad \tau dec \iota \text{ e } \iota \in 1 &\Rightarrow \tau \leq \delta; & \forall \delta \quad \exists \iota \in 1 \quad \delta dec \iota. \end{aligned}$$

Proposizione 7. Gli universi per la logica lineare distributiva sono tutti e soli i monoidi interni alla categoria monoidale $\mathbf{BM} = \langle \mathbf{BM}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ dei bimoduli tra insiemi parzialmente ordinati (si veda la proposizione 6 del capitolo III).

Un monoide interno a una categoria monoidale $\mathbf{K} = \langle \mathbf{K}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ è una tripla:

$$\langle M, dec, 1 \rangle$$

ove:

- M è un oggetto di \mathbf{K} ;

- $dec : M \otimes M \longrightarrow M$ è un morfismo di tale categoria che soddisfa il seguente assioma di associatività:

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\eta \alpha} & M \otimes (M \otimes M) \xrightarrow{i \otimes dec} M \otimes M \\ \downarrow dec \otimes i & & \downarrow dec \\ M \otimes M & \xrightarrow{dec} & M \end{array}$$

- $1 : 1 \longrightarrow M$ è un morfismo di tale categoria che soddisfa il seguente assiomi relativi all'unità:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes 1 & \xrightarrow{i \otimes 1} & M \otimes M \\ \eta \lambda \downarrow & & \downarrow dec \\ M & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 \otimes M & \xrightarrow{1 \otimes i} & M \otimes M \\ \eta \rho \downarrow & & \downarrow dec \\ M & & M \end{array}$$

Nella categoria \mathbf{BM} un monoide è un ordine parziale M dotato di una relazione ternaria dec tale che soddisfa:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \delta \rangle dec \tau &\Rightarrow \text{i) } \sigma' \leq \sigma \text{ e } \tau' \leq \tau \Rightarrow \langle \sigma', \delta' \rangle dec \tau, \\ &\text{ii) } \tau \leq \tau' \Rightarrow \langle \sigma, \delta \rangle dec \tau', \end{aligned}$$

e dotato di un sottoinsieme 1 chiuso rispetto al futuro:

$$\iota \in 1 \text{ e } \iota \leq \iota' \Rightarrow \iota' \in 1.$$

Infatti esiste una corrispondenza biunivoca tra tali sottinsiemi e i morfismi:

$$1 : 1 \longrightarrow M.$$

Si ponga infatti $\iota \in 1$ sse $\bullet 1 \iota$.

La condizione sulla associatività asserisce che:

$$\langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle(dec\otimes i)\bullet dec\tau \text{ sse } \langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle\alpha\bullet(i\otimes dec)\bullet dec\tau$$

$\langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle(dec\otimes i)\bullet dec\tau$ equivale a:

$$\frac{\exists\zeta,\xi \frac{\langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle(dec\otimes i)\langle\zeta,\xi\rangle}{\langle\sigma,\gamma\rangle dec\zeta \text{ e } \delta\leq\xi} \text{ e } \langle\zeta,\xi\rangle dec\tau}{\exists\zeta \langle\sigma,\gamma\rangle dec\zeta \text{ e } \frac{\exists\xi(\delta\leq\xi \text{ e } \langle\zeta,\xi\rangle dec\tau)}{\langle\zeta,\delta\rangle dec\tau}}$$

mentre $\langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle\alpha\bullet(dec\otimes i)\bullet dec\tau$ equivale a:

$$\frac{\exists\sigma',\gamma',\delta' \left(\frac{\langle\langle\sigma,\gamma\rangle,\delta\rangle\alpha\langle\sigma',\gamma',\delta'\rangle}{\sigma\leq\sigma', \gamma\leq\gamma', \delta\leq\delta'}, \langle\sigma',\gamma',\delta'\rangle(i\otimes dec)\bullet dec\tau \right)}{\langle\sigma,\gamma,\delta\rangle(i\otimes dec)\bullet dec\tau}$$

$$\frac{\exists\zeta,\xi \frac{\langle\sigma,\gamma,\delta\rangle(i\otimes dec)\langle\zeta,\xi\rangle}{\sigma\leq\zeta, \langle\gamma,\delta\rangle dec\xi}, \langle\zeta,\xi\rangle dec\tau}{\exists\xi \langle\gamma,\delta\rangle dec\xi, \frac{\exists\zeta(\sigma\leq\zeta \text{ e } \langle\zeta,\xi\rangle dec\tau)}{\langle\sigma,\xi\rangle dec\tau}}$$

Pertanto le condizioni sull'associatività consistono nel seguente assioma:

$$\exists\zeta(\langle\sigma,\gamma\rangle dec\zeta \langle\zeta,\delta\rangle dec\tau) \text{ sse } \exists\xi(\langle\gamma,\delta\rangle dec\xi \text{ e } \langle\sigma,\gamma\rangle dec\tau).$$

Gli assiomi sull'unità asseriscono che:

$$\langle\sigma,\bullet\rangle(i\otimes 1)\bullet dec\sigma'' \text{ sse } \sigma\leq\sigma''.$$

$\langle\sigma,\bullet\rangle(i\otimes 1)\bullet dec\sigma''$ equivale a :

$$\frac{\exists\sigma',\iota \left(\frac{\langle\sigma,\bullet\rangle(i\otimes 1)\langle\sigma',\iota\rangle}{\sigma\leq\sigma', \frac{\bullet 1_\iota}{\iota\in 1}}, \langle\sigma',\iota\rangle dec\sigma'' \right)}{\exists\iota\in 1, \frac{\exists\sigma'(\sigma\leq\sigma' \text{ e } \langle\sigma',\iota\rangle dec\sigma'')}{\langle\sigma,\iota\rangle dec\sigma''}}$$

Pertanto le condizioni sull'unità consistono nei seguenti assiomi:

$$\exists\iota\in 1 \langle\sigma,\iota\rangle dec\sigma'' \text{ sse } \sigma\leq\sigma'',$$

e analogamente:

$$\exists\iota\in 1 \langle\iota,\delta\rangle dec\delta'' \text{ sse } \delta\leq\delta''.$$

Si osservi che la condizione:

$$(*) \sigma \leq \sigma' \Rightarrow \exists \iota (\iota \in 1, \langle \sigma, \iota \rangle \text{dec} \sigma')$$

è equivalente alla condizione:

$$(**) \exists \iota (\iota \in 1, \langle \sigma, \iota \rangle \text{dec} \sigma).$$

Infatte se vale (*) allora per $\sigma' = \sigma$ otteniamo (**). Viceversa se vale (**) e $\sigma \leq \sigma'$ per le condizioni sui morfismi di **BM** otteniamo che $\langle \sigma, \iota \rangle \text{dec} \sigma'$, pertanto (*).

Sia pertanto $\langle U, \leq, \text{dec}, 1 \rangle$ un universo per la logica lineare distributiva. Allora $\langle U, \leq, \text{dec}, 1 \rangle$ ove $\sigma \leq \sigma'$ sse $\sigma' \leq \sigma$ è un monoide nella categoria **BM**.

Viceversa assegnato un monoide $\langle M, \leq, \text{dec}, 1 \rangle$ in **BM** $\langle M, \leq, \text{dec}, 1 \rangle$ ove $\sigma \leq \sigma'$ sse $\sigma' \leq \sigma$ è un universo per la logica lineare distributiva.

Esempi.

1. Sia F l'insieme delle frecce di una categoria piccola C dotato della relazione identica. Si ponga $\tau \text{dec} \sigma \delta$ sse $\tau = \sigma \bullet \delta$, e sia 1 l'insieme delle identità della categoria. Allora $U = \langle F, =, \text{dec}, 1 \rangle$ è un universo per la logica lineare distributiva. La teoria costruita su questo universo è la teoria lineare P_F dell'esempio 5 del capitolo 1.

2. Sia B un oggetto della categoria **BM** e si consideri il prodotto $B^{\text{op}} \otimes B$. Tale prodotto è un monoide della categoria quando si consideri la relazione ternaria dec così definita:

$$\langle \langle a, b \rangle, \langle b', c \rangle \rangle \text{dec} \langle a', c' \rangle \quad \text{sse}$$

$$a' \leq a, b \leq b', c \leq c'.$$

Mostriamo che tale relazione è un morfismo di **BM**.

Se $a' \leq a$, $b \leq b'$, $c \leq c'$ e $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle a, b \rangle$ e $\langle \beta', \chi \rangle \leq \langle b', c \rangle$, cioè $a \leq \alpha$, $\beta \leq b$, $b' \leq \beta'$ e $\chi \leq c$, allora $a' \leq \alpha$, $\beta \leq \beta'$, e $\chi \leq c'$. Analogamente se $\langle a', c' \rangle \leq \langle \alpha', \chi' \rangle$, cioè $\alpha' \leq a'$ e $c' \leq \chi'$ allora $\alpha' \leq a$, $b \leq b'$, $c \leq \chi'$.

Tale relazione soddisfa la proprietà associativa. Infatti da $\langle \sigma, \zeta \rangle \text{dec}$ e $\langle \gamma, \delta \rangle \text{dec}$, cioè $t_1 \leq s_1$, $s_2 \leq z_1$, $z_2 \leq t_2$ e $z_1 \leq g_1$, $g_2 \leq d_1$, $d_2 \leq z_2$, sia allora $\xi = \langle s_1, g_2 \rangle$ e si osservi che valgono le seguenti relazioni: $s_1 \leq s_1$, $s_2 \leq z_1 \leq g_1$, $g_2 \leq g_2$, cioè $\langle \sigma, \gamma \rangle \text{dec}$ e $t_1 \leq s_1$, $g_2 \leq d_1$, $d_2 \leq z_2 \leq t_2$ cioè $\langle \xi, \delta \rangle \text{dec}$. La verifica dell'altra implicazione è analoga.

Sia allora $1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \}$: è immediato osservare che tale insieme è chiuso rispetto al futuro e soddisfa gli assiomi sull'unità. Infatti per osservare che per ogni σ esiste $\iota \in 1$ $\langle \sigma, \iota \rangle \text{dec}$ si ponga $\iota = \langle s_2, s_2 \rangle$. Viceversa se $\langle \sigma, \iota \rangle \text{dec}$ e $\iota \in 1$ allora $t_1 \leq s_1$, $s_2 \leq i_1$ e $i_2 \leq t_2$, ma poiché $i_1 \leq i_2$ allora segue che $s_2 \leq t_2$, pertanto $\sigma \leq \tau$. In modo analogo si ragiona per il caso destro.

Pertanto $\langle B^{\text{op}} \otimes B, \leq_{\text{op}} \otimes \leq, \text{dec}, 1 \rangle$ è un monoide in **BM** ovvero un universo per la logica lineare distributiva.

Nel caso particolare in cui la relazione di \leq sia la relazione identica allora la teoria di crivelli costruita sull'universo è la teoria lineare R_B delle relazioni binarie su B .

3. Si consideri la categoria **Mon^C** dei funtori da una categoria fissata **C** alla categoria dei monoidi negli insiemi. Tale categoria coincide con la categoria dei monoidi nella categoria **Ins^C** dei prefasci.

Un oggetto in questa categoria è un funtore

$$F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Mon}.$$

Ad ogni oggetto di tale categoria possiamo far corrispondere un monoide nella categoria **BM** nel seguente modo:

Sia S l'unione insiemistica disgiunta di tutti gli oggetti F_c per c oggetto di \mathbf{C} .

$$S := \sum_{c \in \mathbf{C}} F_c$$

Sia \leq la relazione in S così definita:

$$\sigma \leq \sigma' \text{ sse } \exists f \in C \text{ tale che } \sigma = Ff(\sigma').$$

Proposizione 8. La relazione \leq è riflessiva e transitiva.

Dimostrazione.

Tale relazione è riflessiva:

Sia $\sigma \in S$, allora $\exists c \in \text{Obj}(C)$ tale che $\sigma \in F_c$. Pertanto $\sigma = I_{F_c}(\sigma) = F I_c(\sigma)$.

Pertanto $\sigma \leq \sigma$.

Tale relazione è transitiva:

Siano $\sigma \leq \sigma'$ e $\sigma' \leq \sigma''$, cioè $\sigma = Fg(\sigma')$ e $\sigma' = Fh(\sigma'')$, $g, h \in C$. Allora $\sigma = Fg(Fh(\sigma'')) = Fh \bullet Fg(\sigma'') = Fh \bullet g(\sigma'')$, da cui $\sigma \leq \sigma''$.

Sia dec la relazione ternaria così definita:

$$\tau dec \sigma \delta \text{ sse } \exists g, h \text{ tali che } \tau = Fg(\sigma) \bullet Fh(\delta).$$

Proposizione 9. La relazione dec soddisfa le condizioni di compatibilità con la relazione \leq .

Dimostrazione.

Sia $\tau dec \sigma \delta$, cioè $\tau = Fg(\sigma) \bullet Fh(\delta)$ per qualche g, h .

Se $\tau' = Fg'(\tau)$ allora $\tau' = Fg'(Fg(\sigma) \bullet Fh(\delta)) = Fg'(Fg(\sigma)) \bullet Fg'(Fh(\delta)) = F(g \bullet g')(\sigma) \bullet F(h \bullet g')(\delta)$.

Analogamente se $\sigma = Fg'(\sigma')$ e $\delta = Fh'(\delta')$ allora $\tau = Fg(Fg'(\sigma')) \bullet Fh(Fh'(\delta')) = F(g' \bullet g)(\sigma) \bullet F(h' \bullet h)(\delta)$.

Nota. Considereremo d'ora in poi il quoziente di S rispetto alla relazione di equivalenza \equiv definita da $\sigma \equiv \sigma'$ sse $\sigma \leq \sigma'$ e $\sigma' \leq \sigma$. L'ultima proposizione mostra che la relazione ternaria è compatibile con la relazione di congruenza e pertanto la definizione canonica nel quoziente:

$$[\tau] \text{ dec } [\sigma] [\delta] \text{ sse } \tau \text{ dec } \sigma \delta$$

non dipende dalla scelta dei rappresentanti. Infatti se $[\tau] \text{ dec } [\sigma] [\delta]$ e $\tau' \equiv \tau$, $\sigma' \equiv \sigma$, $\delta' \equiv \delta$, allora è $\tau' \text{ dec } \sigma' \delta'$, $\tau' \leq \tau$, $\sigma \leq \sigma'$, $\delta \leq \delta'$, pertanto $\tau' \text{ dec } \sigma' \delta'$ e $[\tau'] \text{ dec } [\sigma'] [\delta']$.

Per abuso di notazione scriveremo σ per $[\sigma]$.

Proposizione 10. La relazione dec soddisfa la proprietà associativa:

$$\exists \zeta (\tau \text{ dec } \zeta \delta \text{ e } \zeta \text{ dec } \sigma \gamma) \text{ sse } \exists \xi (\tau \text{ dec } \sigma \xi \text{ e } \xi \text{ dec } \gamma \delta).$$

Dimostrazione.

Supponiamo che $\exists \zeta (\tau \text{ dec } \zeta \delta \text{ e } \zeta \text{ dec } \sigma \gamma)$, cioè $\tau = Ff(\zeta) \bullet Fg(\delta)$ e $\zeta = Fh(\sigma) \bullet Fk(\gamma)$ vale a dire $\tau = Ff(Fh(\sigma) \bullet Fk(\gamma)) \bullet Fg(\delta)$. Allora $\tau = F(h \bullet f)(\sigma) \bullet F(k \bullet f)(\gamma) \bullet Fg(\delta)$. Si ponga $\xi = F(k \bullet f)(\gamma) \bullet Fg(\delta)$, si ottiene che $\tau = F(h \bullet f)(\sigma) \bullet FId(\xi)$, pertanto $\tau \text{ dec } \sigma \xi$ e $\xi \text{ dec } \gamma \delta$.

La dimostrazione dell'altra implicazione è analoga.

Definizione 2.

$$1 = \{ \iota_{Fc} \mid c \in C \}$$

ove indichiamo con ι_M l'unità del monoide M .

Proposizione 11. 1 è un crivello.

Sia infatti $\iota \in 1$ e sia $\alpha \leq \iota$, cioè $\alpha = Ff(\iota)$ per qualche f . Poichè l'immagine di una unità è una unità allora $\alpha \in 1$.

Proposizione 12. 1 soddisfa le proprietà dell'unità:

$$\exists \iota (\tau_{dec} \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \sigma,$$

$$\exists \iota (\tau_{dec} \iota \delta \text{ e } \iota \in 1) \text{ sse } \tau \leq \delta.$$

Dimostrazione.

Sia $\sigma \in S$, allora $\sigma \in F_C$ per qualche $c \in \text{Obj}(C)$, pertanto $\sigma = F_{1_C}(\sigma) \bullet F_{1_C}(\iota_{F_C})$,
cioè $\sigma_{dec} \sigma \iota_{F_C}$, e ciò è sufficiente a dimostrare un verso dell'implicazione.

Viceversa se $\exists \iota (\tau_{dec} \sigma \iota \text{ e } \iota \in 1)$ cioè $\tau = F_f(\sigma) \bullet F_g(\iota_{\text{dom}(F_g)})$, allora, poiché
 $F_g(\iota) = \iota_{\text{cod}(F_g)}$, $\tau = F_f(\sigma) \bullet \iota_{\text{cod}(F_g)} = F_f(\sigma)$, pertanto $\tau \leq \sigma$.

La dimostrazione dell'altra equivalenza è del tutto analoga.

Capitolo V

Logica lineare classica distributiva

In questo capitolo metteremo a fuoco l'assioma $[d_0]$ (capitolo II, definizione 6) che definisce il falso lineare classico. Gli universi per la logica lineare classica verranno cercati trovando condizioni semantiche equivalenti all'assioma e mostrando che la validità di tali condizioni in un universo di filtri primi di una teoria è equivalente alla validità dell'assioma nella teoria. Tali condizioni semantiche verranno studiate per mostrare che esse possano essere concettualizzate in modo semplice attraverso una relazione binaria rappresentabile a destra e a sinistra attraverso una corrispondenza biunivoca. Gli universi per la logica lineare classica distributiva verranno pertanto presentati attraverso questa concettualizzazione e verranno discussi esempi di tali strutture. Si osserverà che tali esempi soddisfano sempre certi assiomi aggiuntivi che pertanto verranno indagati nel contesto di arbitrari universi. Tali condizioni semantiche si dimostreranno fertili e verranno studiate le loro principali implicazioni. L'ultima parte di questo capitolo è dedicata allo studio delle relazioni di derivabilità tra gli assiomi proposti. Verranno pertanto costruiti universi "ad hoc" per mostrare che taluni assiomi possono essere soddisfatti e non altri.

Studio degli assiomi definienti il falso lineare

Teoremi di corrispondenza: dalla sintassi alla semantica

Proposizione 1. Un crivello 0 soddisfa la proprietà di essere un elemento dualizzante

$$*(p^*) = p = (*p)^* \text{ per ogni } p \in P$$

in una teoria di crivelli OU sse valgono le seguenti proposizioni nell'universo U:

$$\forall \sigma \exists \delta (\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \not\leq \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma')),$$

$$\forall \delta \exists \sigma (\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \not\leq \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta')),$$

ove abbiamo posto

$$\sigma \not\leq \delta \text{ sse } \exists \tau (\tau \text{ dec } \sigma \delta \text{ e } \tau \not\leq 0).$$

Dimostrazione.

Poiché le relazioni $p \not\leq *(p^*)$ e $p \not\leq (*p)^*$ sono sempre vere dovremo indagare le converse, rispettivamente :

$$*(p^*) \not\leq p \text{ e } (*p)^* \not\leq p.$$

Cominciamo dalla prima.

$$\frac{\frac{\frac{\forall p \ *(p^*) \not\leq p}{\sigma \in *(p^*)}}{\Delta\{\sigma\} \not\leq *(p^*)} \text{ e } \frac{\sigma \notin p}{p \subseteq \{\sigma\}'}}{\Delta\{\sigma\} \bullet p^* \not\leq 0 \quad p \not\leq \odot\{\sigma\}'}}{\frac{p^* \not\leq \Delta\{\sigma\}^*}{(*) \exists \sigma \{ (\odot\{\sigma\})^* \not\leq \Delta\{\sigma\}^* \}}}$$

La condizione (*) non è più quantificata al secondo ordine: può essere esplicitata per poi essere negata nuovamente.

$\exists \sigma \forall \delta \{ \text{Error!} \}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\delta \in \Delta\{\sigma\}^*}{\forall \tau (\exists \sigma' (\tau_{dec} \sigma' \delta, \frac{\sigma' \in \Delta\{\sigma\}}{\sigma' \leq \sigma}) \Rightarrow \tau \cdot 0)}}{\tau_{dec} \sigma \delta} \}$$

Negando nuovamente otteniamo infine la prima delle due condizioni della proposizione:

$$\forall \sigma \exists \delta \{ \exists \tau (\tau_{dec} \sigma \delta \text{ e } \tau \neq 0) \text{ e } \forall \sigma' (\exists \tau (\tau_{dec} \sigma' \delta \text{ e } \tau \neq 0) \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \}.$$

Si osservi che investigare la seconda condizione sintattica si riduce a investigare la prima nella teoria duale. Otteniamo pertanto l'equivalenza con:

$$\forall \sigma \exists \delta \{ \exists \tau (\tau_{dec} \sigma \delta \text{ e } \tau \neq 0) \text{ e } \forall \sigma' (\exists \tau (\tau_{dec} \sigma' \delta \text{ e } \tau \neq 0) \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \},$$

vale a dire:

$$\forall \sigma \exists \delta \{ \exists \tau (\tau_{dec} \delta \sigma \text{ e } \tau \neq 0) \text{ e } \forall \sigma' (\exists \tau (\tau_{dec} \delta \sigma' \text{ e } \tau \neq 0) \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \},$$

che con un cambio opportuno di variabili si riconosce essere la seconda condizione semantica della proposizione.

Analisi delle condizioni semantiche associate all' assioma sul falso lineare.

Sia $U = \langle S, \leq, dec, 1 \rangle$ un universo per la logica lineare e sia $0 \subseteq S$ un sottoinsieme assegnato chiuso rispetto all'ordine. Poniamo:

$$\sigma \not\leq \delta \text{ sse } \exists \tau (\tau_{dec} \sigma \delta \text{ e } \tau \neq 0).$$

Si osservi che $\sigma \not\leq \delta$ e $\sigma \leq \sigma'$ e $\delta \leq \delta'$ implica che $\sigma' \not\leq \delta'$.

Per ipotesi valgano in U:

$$(1) \quad \forall \sigma \exists \delta (\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \not\leq \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma'));$$

$$(2) \quad \forall \delta \exists \sigma (\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \not\leq \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta')).$$

Proposizione 2. Per ogni σ esiste un solo δ tale che:

(*) $\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \not\leq \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma')$.

Per ogni δ esiste un solo σ tale che:

(**) $\sigma \not\leq \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \not\leq \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta')$.

Dimostrazione.

Sia σ fissato. Siano δ_1, δ_2 tali che valga (*). In corrispondenza di δ_1, δ_2 esistono σ_1, σ_2 tali che vale (**). Da $\sigma_1 \not\leq \delta_1$ e $\sigma_2 \not\leq \delta_2$ deduciamo che $\sigma \leq \sigma_j$ $j=1,2$. Pertanto da $\sigma \not\leq \delta_2$ e $\sigma \not\leq \delta_1$ deduciamo che $\sigma_1 \not\leq \delta_2$ e $\sigma_2 \not\leq \delta_1$, perciò $\delta_1 \leq \delta_2$ e $\delta_2 \leq \delta_1$.

La dimostrazione dell'altra proposizione è speculare a quella riportata.

Definizione 1. Sia $d:U \longrightarrow U$ la corrispondenza che associa a σ l'unico δ tale che (*). Analogamente sia $s:U \longrightarrow U$ la corrispondenza che associa a δ l'unico σ tale che (**).

Proposizione 3. La corrispondenza s è inversa della corrispondenza d .

Dimostrazione.

Sia $\sigma \in S$ fissato, dimostriamo che $\sigma = s(d(\sigma))$. Da $\sigma \not\leq d(\sigma)$ e $s(d(\sigma)) \not\leq d(\sigma)$ deduciamo che $\sigma \leq s(d(\sigma))$; da $s(d(\sigma)) \not\leq d(\sigma)$ e $s(d(\sigma)) \not\leq d(s(d(\sigma)))$ deduciamo che $d(\sigma) \leq d(s(d(\sigma)))$ pertanto $\sigma \not\leq d(s(d(\sigma)))$ da cui $s(d(\sigma)) \leq \sigma$.

La dimostrazione che $\delta = d(s(\delta))$ è analoga.

Proposizione 4. $\sigma \not\leq \delta$ sse $d(\sigma) \leq \delta$ sse $s(\delta) \leq \sigma$.

Da $\sigma \not\leq \delta$ cioè $\sigma \not\leq d(s(\delta))$ segue $s(\delta) \leq \sigma$, se $s(\delta) \leq \sigma$ da $s(\delta) \not\leq \delta$ segue $\sigma \not\leq \delta$.

Proposizione 5. $\tau \leq \tau'$ sse $s(\tau') \leq s(\tau)$ sse $d(\tau') \leq d(\tau)$.

$\tau \leq \tau'$ sse $s(d(\tau)) \leq \tau'$ sse $\tau' \not\leq d(\tau)$ sse $d(\tau') \leq d(\tau)$.

Proposizione 6. $\tau \text{ dec } \sigma \delta$ sse $d(\sigma) \text{ dec } \delta d(\tau)$ sse $s(\delta) \text{ dec } s(\tau) \sigma$.

Se $\tau \text{ dec } \sigma \delta$ allora da $\tau \neq d(\tau)$ cioè $\exists \iota (\iota \text{ dec } \tau d(\tau) \text{ e } \tau / 0)$ segue per l'associatività che $\exists \kappa$ tale che $\iota \text{ dec } \sigma \kappa$ e $\kappa \text{ dec } \delta d(\tau)$, ma allora $\sigma \neq \kappa$ da cui $d(\sigma) \leq \kappa$ e per le proprietà della decomposizione $d(\kappa) \text{ dec } \delta d(\tau)$.

Proposizione 7. $\tau / 0$ sse $d(d(\tau)) / 0$.

Sia $\tau / 0$. Poichè $\exists \kappa (\kappa \text{ dec } d(\tau) d(d(\tau)) \text{ e } \kappa / 0)$ deduciamo che $d(\tau) \text{ dec } s(\kappa) d(\tau)$ e $\tau \text{ dec } s(\kappa)$ cioè $\tau \neq s(\kappa)$ da cui segue $d(\tau) \leq s(\kappa)$ e $\kappa \leq d(d(\tau))$. Se fosse $d(d(\tau)) / 0$, allora anche $\kappa / 0$ contro le ipotesi.

Un ragionamento analogo porta a dimostrare che $\tau / 0$ implica $s(s(\tau)) / 0$.

Corollario. $\tau / 0$ sse $s(s(\tau)) / 0$.

Proposizione 8. $\iota \in 1$ sse $d(\iota) / 0$.

Sia $\iota \in 1$. $\exists \kappa (\kappa \text{ dec } d(\iota) \text{ e } \kappa / 0)$, ma per gli assiomi su 1 $\kappa \leq d(\iota)$ pertanto $d(\iota) / 0$.

Supponiamo $d(\iota) / 0$. $\exists i \in 1$ tale che $d(\iota) \text{ dec } i d(\iota)$, ma allora $i \neq d(\iota)$ pertanto $\iota = s(d(\iota)) \leq i$ da cui $\iota \in 1$.

Corollario. $\iota \in 1$ sse $s(\iota) / 0$.

Proposizione 9. $\forall \tau \exists \iota (\iota / 0 \text{ e } \tau \text{ dec } s(\iota) \tau)$.

Da $\iota \text{ dec } \tau d(\tau)$ con $\iota / 0$ segue che $\tau \text{ dec } s(\iota) \tau$.

Corollario. $\forall \tau \exists \iota (\iota / 0 \text{ e } \tau \text{ dec } d(\iota) \tau)$.

Proposizione 10. Se $\iota / 0$ e $\tau \text{ dec } \sigma d(\iota)$, allora $\tau \leq \sigma$.

Da $\tau \text{ dec } \sigma d(\iota)$ segue $\iota \text{ dec } s(\tau) \sigma$, cioè $s(\tau) \neq \sigma$ pertanto $\tau = d(s(\tau)) \leq \sigma$.

Corollario. Se $\iota / 0$ e $\tau \text{ dec } s(\iota) \delta$, allora $\tau \leq \delta$.

Si osservi che le proposizioni 7-9-10 mostrano che qualora siano valide (1) e (2) il seguente crivello:

$$1' = \{ d(\iota) \mid \iota / 0 \} = \{ s(\iota) \mid \iota / 0 \}$$

soddisfa gli assiomi sull'unità propri del crivello unitario, mentre la proposizione 8 mostra che se 1 è assegnato allora 1 coincide con 1'.

Assiomatizzazioni equivalenti.

Gli assiomi (1) e (2) non hanno un chiaro significato. Mostremo allora che altre assiomatizzazioni sono più intuitive pur essendo equivalenti.

Infatti le proposizioni 3 e 4 hanno mostrato che in un universo U per la logica lineare distributiva in cui valgono gli assiomi (1) e (2) è possibile costruire una corrispondenza biunivoca s la cui inversa è d che soddisfa per ogni σ, δ :

$$(3) \sigma \leq \delta \quad \text{sse} \quad d(\sigma) \leq \delta \quad \text{sse} \quad s(\delta) \leq \sigma;$$

$$(4) s = d^{-1}.$$

Viceversa in un universo U in cui sia assegnata una corrispondenza biunivoca che soddisfa (3), sono soddisfatti anche (1) e (2).

Infatti scelto $\sigma \in S$, da $d(\sigma) \leq d(\sigma)$ segue che $\sigma \leq d(\sigma)$ e da $\sigma' \leq d(\sigma)$ segue $s(d(\sigma)) \leq \sigma'$, cioè $\sigma \leq \sigma'$. La proposizione (1) viene così dimostrata.

Abbiamo così dimostrato la seguente

Proposizione 11. L'assiomatizzazione (1)-(2) è equivalente alla assiomatizzazione (3)-(4).

Nota. Con la proposizione 19 verrà mostrato che gli assiomi (3) e (4) valgono se e solo se la relazione $\emptyset : U^{op} \longrightarrow U$ è un isomorfismo nella categoria

BM.

Un'altro modo per concettualizzare la situazione è affermare che la corrispondenza \emptyset ha un minimo in ogni variabile e tali minimi sono in corrispondenza biunivoca:

$$(5) \forall \sigma \exists \delta \{ \sigma \emptyset \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \emptyset \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta') \};$$

$$(6) \forall \delta \exists \sigma \{ \sigma \emptyset \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \emptyset \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \};$$

posto:

$$\delta = d(\sigma) \quad \text{sse} \quad \sigma \emptyset \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \emptyset \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta');$$

$$\sigma = s(\delta) \quad \text{sse} \quad \sigma \emptyset \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \emptyset \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma');$$

vale inoltre:

$$(7) \quad s(d(\sigma)) = \sigma; \quad (8) \quad d(s(\delta)) = \delta.$$

L'equivalenza dell'assiomatizzazione 5-8 con l'assiomatizzazione 3-4 è immediata. Pertanto possiamo stabilire che vale la

Proposizione 12. L'assiomatizzazione (1)-(2) è equivalente alla assiomatizzazione (5)-(8).

Teoremi di corrispondenza: dalla semantica alla sintassi

Proposizione 13. L'assioma (5):

$$\forall \sigma \exists \delta \{ \sigma \emptyset \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \emptyset \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta') \}$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale nella teoria T:

$$*T = \perp, \quad *(p \wedge q) = *p \vee *q.$$

Lemma. La relazione $\sigma \emptyset \delta$ è equivalente in un universo di filtri primi a ciascuna delle seguenti forme:

$$(i) \sigma^* \cap \delta = \emptyset; \quad (ii) \sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset;$$

$$(iii) \sigma \cap \delta^* = \emptyset; \quad (iv) \delta^{*-1} \cap \sigma = \emptyset.$$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{c}
 \sigma \not\subseteq \delta \\
 \hline
 \exists \tau (\tau \supseteq \sigma \otimes \delta \text{ e } 0 \notin \tau) \\
 \hline
 \forall s, d \left\{ \frac{(s \in \sigma, d \in \delta) \Rightarrow s \bullet d \notin 0}{s \bullet d \notin 0} \right\} \\
 \frac{(s \in \sigma, \frac{s \bullet d \notin 0}{d \notin s^*}) \Rightarrow d \notin \delta}{\forall s \{ s \in \sigma \Rightarrow s^* \notin \delta \}} \\
 \hline
 \sigma^* \cap \delta = \emptyset \\
 \hline
 \forall s \{ s^* \in \delta \Rightarrow s \notin \delta \} \\
 \hline
 \sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset
 \end{array}$$

Le altre due proposizioni si ottengono nello stesso modo eliminando la quantificazione su s anziché su d .

Dimostrazione della proposizione.

Osserviamo che $\forall \delta' \{ \sigma \not\subseteq \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta' \}$ è equivalente a $\delta^c \subseteq {}^{*-1}\sigma$.

Infatti:

$$\begin{array}{c}
 \forall \delta' \{ \sigma \not\subseteq \delta' \Rightarrow \frac{\delta \leq \delta'}{\delta \supseteq \delta'} \} \\
 \hline
 \neg \exists \delta' \{ \sigma \not\subseteq \delta', \frac{\delta' \not\subseteq \delta}{\exists d (d \in \delta', d \notin \delta)} \} \\
 \hline
 \exists d \{ d \notin \delta, \exists \delta' (d \in \delta', \frac{\sigma \not\subseteq \delta'}{{}^{*-1}\sigma \cap \delta' = \emptyset}) \} \\
 \hline
 (*) \frac{\quad}{d \notin {}^{*-1}\sigma} \\
 \hline
 \forall d \{ d \notin \delta \Rightarrow d \in {}^{*-1}\sigma \} \\
 \hline
 \delta^c \subseteq {}^{*-1}\sigma
 \end{array}$$

Si osservi che poichè $*$ (\cdot): $T^{\text{op}} \longrightarrow T$ preserva \top e \wedge , allora la preimmagine ${}^{*-1}\sigma$ di un filtro σ è un filtro in T^{op} , cioè un ideale. Pertanto abbiamo potuto applicare il lemma L.E.E all'ideale ${}^{*-1}\sigma$ e alla base di filtro $\{d\}$ nel passaggio segnato da (*).

Pertanto possiamo analizzare la condizione completa:

$$\frac{\forall \sigma \exists \delta \left\{ \frac{\sigma \not\subseteq \delta}{*^{-1}\sigma \cap \delta = \emptyset}, \frac{\forall \delta' (\sigma \not\subseteq \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta')}{\delta^c \subseteq *^{-1}\sigma} \right\}}{*^{-1}\sigma \subseteq \delta^c} \frac{}{*^{-1}\sigma = \delta^c}$$

La condizione risultante equivale a chiedere che $*^{-1}\sigma$ sia un ideale primo per ogni $\sigma \in \bullet T$, e poichè $*^{-1}\sigma$ per l'osservazione precedente è sicuramente un ideale, allora è necessario e sufficiente chiedere che $*^{-1}\sigma$ sia un cofiltro, vale a dire:

- (1) $\forall \sigma \in \bullet T \quad T \not\subseteq *^{-1}\sigma,$
- (2) $\forall \sigma \in \bullet T \quad p \wedge q \in *^{-1}\sigma \Rightarrow p \in *^{-1}\sigma \text{ o } q \in *^{-1}\sigma.$

La prima condizione afferma che $\forall \sigma \quad *T \not\subseteq \sigma$ che è equivalente (facendo uso del L.E.E.) ad affermare $*T = \perp$.

La seconda condizione afferma che:

$$\forall p, q \forall \sigma \left\{ \frac{p \wedge q \in *^{-1}\sigma}{*(p \wedge q) \in \sigma} \Rightarrow \frac{p \in *^{-1}\sigma \quad q \in *^{-1}\sigma}{*p \in \sigma \quad \text{o} \quad *q \in \sigma} \right\} \frac{}{*p \vee *q \in \sigma}$$

Applicando ancora una volta il L.E.E. otteniamo la condizione puramente sintattica equivalente:

$$\forall p, q \quad *(p \wedge q) \not\subseteq *p \vee *q,$$

e poichè il converso è sempre vero possiamo anche scrivere:

$$\forall p, q \quad *(p \wedge q) = *p \vee *q.$$

Proposizione 14. L'assioma (6):

$$\forall \delta \exists \sigma \{ \sigma \not\subseteq \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \not\subseteq \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \}$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale nella teoria:

$$T^* = \perp, \quad (p \wedge q)^* = p^* \vee q^*.$$

Dimostrazione. L'assioma 6 è esattamente il duale dell'assioma 5, esso varrà pertanto in $\bullet T$ sse vale nella teoria duale T^d :

$${}^*d\top = \perp, \quad {}^*d(p \wedge q) = {}^*dp \vee {}^*dq,$$

chè appunto la proposizione.

Per le analisi appena svolte possiamo anche osservare che in un universo di filtri primi $\bullet T$ valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \delta = d(\sigma) \quad \text{sse} \\ \sigma \notin \delta \text{ e } \forall \delta' (\sigma \notin \delta' \Rightarrow \delta \leq \delta') \quad \text{sse} \\ {}^{*-1}\sigma = \delta^c; \\ \sigma = s(\delta) \quad \text{sse} \\ \sigma \notin \delta \text{ e } \forall \sigma' (\sigma' \notin \delta \Rightarrow \sigma \leq \sigma') \quad \text{sse} \\ \delta^{*-1} = \sigma^c. \end{aligned}$$

Proposizione 15. L'assioma (7):

$$s(d(\sigma)) = \sigma$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale nella teoria:

$$\forall p \in T \quad {}^*(p^*) = p.$$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall \sigma \{ \sigma = s(d(\sigma)) \}}{\forall \sigma, \delta \left\{ \frac{\delta = d(\sigma)}{(*-1)\sigma = \delta^c} \Rightarrow \frac{\sigma = s(\delta)}{\delta^{*-1} = \sigma^c} \right\}} \\
 \frac{(*-1)\sigma^c = \delta}{\forall \sigma \left\{ \frac{((*-1)\sigma)^c}{((*-1)\sigma)^{*-1} = \sigma^c} \right\}} \\
 \frac{(*-1)\sigma^{*-1} = \sigma}{\forall s \forall \sigma \left\{ \frac{s \in (*-1)\sigma^{*-1}}{s^* \in *-1\sigma} \text{ sse } s \in \sigma \right\}} \\
 \frac{*(s^*) \in \sigma}{\forall s \quad *(s^*) = s}
 \end{array}$$

Proposizione 16. L'assioma (8):

$$d(s(\delta)) = \delta$$

vale in una universo di filtri primi •T sse vale nella teoria:

$$\forall p \in T \quad (*p)^* = p.$$

La dimostrazione fa ricorso a considerazioni duali.

Universi per la logica lineare classica distributiva

Definizione 2. Un universo per la logica lineare classica distributiva è una settupla $U = \langle S, \leq, dec, 1, 0, s, d \rangle$ ove

- $\langle S, \leq, dec, 1 \rangle$ è un universo per la logica lineare distributiva;

- 0 è un insieme chiuso rispetto all'ordine:

$$\omega \in 0 \text{ e } \omega' \leq \omega \Rightarrow \omega' \in 0.$$

- $s, d: S \longrightarrow S$ sono due funzioni che soddisfano i seguenti assiomi:

$$[\emptyset] \sigma \emptyset \delta \text{ sse } d(\sigma) \leq \delta \text{ sse } s(\delta) \leq \sigma,$$

$$[s, d] s \bullet d = Id_S = d \bullet s,$$

ove la relazione \emptyset è così definita:

$$\sigma \emptyset \delta \text{ sse } \exists \tau (\tau dec \sigma \delta \text{ e } \tau \neq 0).$$

Esempi.

1. Sia F l'insieme delle frecce di una categoria piccola. Possiamo allora costruire l'universo $U := \langle S, \leq, dec, 1 \rangle$ come nell'esempio 1 del capitolo precedente.

Proposizione 17. $0 := 1'$ è un elemento dualizzante di OU sse la categoria è un gruppoide, cioè se per ogni freccia esiste una freccia inversa.

Dimostrazione.

Si osservi che $\sigma \emptyset \delta$ sse $\sigma \bullet \delta \in 1$. In un gruppoide è soddisfatta la condizione:

$$\sigma \bullet \delta \in 1 \text{ sse } \delta = \sigma^{-1} \text{ sse } \sigma = \delta^{-1},$$

infatti $\sigma \bullet \sigma^{-1} \in 1$ e se $\sigma \bullet \delta = I_{\text{dom}(\sigma)}$ allora $\sigma^{-1} = \sigma^{-1} \bullet I_{\text{dom}(\sigma)} = \sigma^{-1} \bullet \sigma \bullet \delta = I_{\text{cod}(\sigma)} \bullet \delta = \delta$.

Viceversa supponiamo che sia soddisfatta:

$$\sigma \bullet \delta \in 1 \text{ sse } \delta = d(\sigma) \quad \text{sse } \sigma = s(\delta).$$

Osserviamo allora che $s(\sigma) = s(\sigma) \bullet I_{\text{dom}(\sigma)} = s(\sigma) \bullet (\sigma \bullet d(\sigma)) = (s(\sigma) \bullet \sigma) \bullet d(\sigma) = I_{\text{cod}(\sigma)} \bullet d(\sigma) = d(\sigma)$. Pertanto scelto $\sigma \in S$ otteniamo che $\sigma \bullet d(\sigma) = I_{\text{dom}(\sigma)}$ e $d(\sigma) \bullet \sigma = I_{\text{cod}(\sigma)}$. Pertanto ogni freccia σ ha una inversa in $d(\sigma)$.

2. Sia G un gruppo e sia $F \in \mathbf{Grp}^G$. Possiamo ripetere la costruzione dell'esempio 3 del capitolo precedente. Si osservi che in tal caso la relazione di specializzazione coincide con l'identità.

Infatti se $\sigma = F\phi(\delta)$ allora $F\phi^{-1}(\sigma) = F\phi^{-1}(F\phi(\delta)) = F\phi \bullet F\phi^{-1}(\delta) = F\phi \bullet \phi^{-1}(\delta) = F1(\delta) = I(\delta) = \delta$.

Sia $i(\) : S/\equiv \longrightarrow S/\equiv$ la corrispondenza che porta $[\sigma]$ in $[\sigma^{-1}]$. Tale corrispondenza è ben definita. Infatti se $\sigma' \in [\sigma]$ $\sigma' = F\phi(\sigma)$ pertanto $F\phi(\sigma^{-1}) = (F\phi(\sigma))^{-1} = \sigma^{-1}$ pertanto $\sigma^{-1} \in [\sigma^{-1}]$.

Si ponga allora $0 = 1'$. Allora si osservi che sono soddisfatte:

$$\exists \phi, \psi (\tau = F\phi(\sigma) \bullet F\psi(\delta) , \tau \in 1) \text{ sse } [\sigma] = [\delta^{-1}] \text{ sse } [\delta] = [\sigma^{-1}].$$

Infatti da $F\phi(\sigma) \bullet F\psi(\delta) = I_{\text{cod}(F\phi)}$, allora $F\phi(\sigma) = (F\psi(\delta))^{-1} = F\psi(\delta^{-1})$ e $\sigma = F\psi \bullet \phi^{-1}(\delta^{-1})$ cioè $[\sigma] = [\delta^{-1}]$ e analogamente $[\delta] = [\sigma^{-1}]$. Viceversa da $[\sigma] = [\delta^{-1}]$ allora $\exists \phi \sigma = F\phi(\delta^{-1}) = F\phi(\delta)^{-1}$, pertanto $F1(\sigma) \bullet F\phi(\delta)^{-1} = \sigma \bullet F\phi(\delta)^{-1} = I_{\text{cod}(F\phi)}$.

Si osservi che possiamo supporre che la categoria \mathbf{Grp} sia la categoria dei gruppidi. In tal caso l'esempio 1 è un caso particolare dell'esempio 2 quando il gruppo G è il gruppo di un solo elemento.

Si osservi che sia nell'esempio 1 che nell'esempio 2 sempre valide le seguenti condizioni semantiche:

$$d(\sigma) = s(\sigma), 1 \in 1 \Rightarrow s(1) \leq 1, \quad \tau dec \sigma \delta \Rightarrow d(\tau) dec d(\delta) d(\sigma).$$

Studieremo più sotto le condizioni sintattiche associate a queste queste condizioni.

3. Sia $\langle B^{op} \otimes B, \leq_{op} \otimes \leq, dec, 1 \rangle$ il monoide nella categoria **BM** dell'esempio 3 del capitolo quarto. Otteniamo l'universo come al solito invertendo la relazione.

Tale universo sarà pertanto $U = \langle B \times B, \leq, dec, 1 \rangle$ ove:

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle \text{ sse } x_1 \leq y_1 \text{ e } y_2 \leq x_2,$$

$$\langle t_1, t_2 \rangle dec \langle s_1, s_2 \rangle \langle d_1, d_2 \rangle \text{ sse}$$

$$t_1 \leq s_1, s_2 \leq d_1, d_2 \leq t_2,$$

$$\langle i_1, i_2 \rangle \in 1 \text{ sse } i_1 \leq i_2.$$

Possiamo enunciare allora la seguente

Proposizione 18. $0 \in OU$ è un elemento dualizzante sse il morfismo

Error! $\in BM(B, B)$ definito da:

$$s \mathbf{Error!} d \text{ sse } \langle d, s \rangle \mathbf{Error!} 0$$

è un isomorfismo nella categoria **BM**.

La dimostrazione della proposizione procede mostrando che gli assiomi (1) e (2) sono equivalenti a condizioni sulla relazione **Error!** soddisfatte se e solo se tale relazione è un isomorfismo.

Si osservi pertanto che la relazione $\langle s_1, s_2 \rangle \emptyset \langle d_1, d_2 \rangle$ è equivalente a $s_2 \leq d_1$ e $\langle s_1, d_2 \rangle \mathbf{Error!} 0$. Infatti da $t_1 \leq s_1, s_2 \leq d_1, d_2 \leq t_2$ otteniamo $\langle t_1, t_2 \rangle \leq \langle s_1, d_2 \rangle$, pertanto da $\langle t_1, t_2 \rangle \mathbf{Error!} 0$ segue $\langle s_1, d_2 \rangle \mathbf{Error!} 0$.

La condizione (1) è pertanto:

$$\forall s_1, s_2 \exists d_1, d_2 \{$$

$$s_2 \leq d_1, \langle s_1, d_2 \rangle \text{Error! 0},$$

$$\forall s'_1, s'_2 ((s'_2 \leq d_1, \langle s'_1, d_2 \rangle \text{Error! 0}) \Rightarrow s_1 \leq s'_1, s'_2 \leq s_2) \quad \}.$$

La seconda parte della condizione può essere analizzata in questo modo:

$$\forall s'_1 (\langle s'_1, d_2 \rangle \text{Error! 0} \Rightarrow \text{Error!}),$$

possiamo allora analizzare la condizione globale:

$$\forall s_1, s_2 \exists d_2 \{ \langle s_1, d_2 \rangle \text{Error! 0},$$

$$\text{Error!} \},$$

condizione che eliminando la quantificazione su s_2 diventa:

$$\forall s_1 \exists d_2 \{ \langle s_1, d_2 \rangle \text{Error! 0}, \forall s'_1 (\langle s'_1, d_2 \rangle \text{Error! 0} \Rightarrow s_1 \leq s'_1) \}.$$

Dopo un opportuno cambio di variabili e utilizzando la relazione **Error!** definita sopra la condizione trovata è:

$$\forall d \exists s \{ s \text{Error!} d, \forall d' (s \text{Error!} d' \Rightarrow d \leq d') \}.$$

Con calcoli del tutto analoghi troviamo che la condizione (2) è equivalente a:

$$\forall d_2 \exists s_1 \{ \langle s_1, d_2 \rangle \text{Error! 0}, \forall d'_2 (\langle s_1, d'_2 \rangle \text{Error! 0} \Rightarrow d'_2 \leq d_2) \},$$

ovvero a:

$$\forall s \exists d \{ s \text{Error!} d, \forall s' (s' \text{Error!} d \Rightarrow s' \leq d) \}.$$

Con calcoli del tutto analoghi a quelli sviluppati nelle proposizioni 2-4 possiamo asserire che ogni morfismo R in **BM** che soddisfa

$$(*) \forall d \exists s \{ s R d, \forall d' (s R d' \Rightarrow d \leq d') \},$$

$$(**) \forall s \exists d \{ s R d, \forall s' (s' R d \Rightarrow s' \leq d) \},$$

è rappresentabile a destra e a sinistra attraverso una corrispondenza biunivoca f :

$$s R d \quad \text{sse} \quad f(s) \leq d \quad \text{sse} \quad s \leq f^{-1}(d).$$

Si osservi che ciò equivale ad affermare che R è definita attraverso un isomorfismo nella categoria **PO** degli insiemi parzialmente ordinati.

Dimostriamo allora la seguente

Proposizione 19. Gli isomorfismi nella categoria **PO** e nella categoria **BM** sono in corrispondenza biunivoca.

Dimostrazione.

Sia $f: P \longrightarrow P'$ un isomorfismo di **PO** e siano R e R' le relazioni così definite:

$$\begin{aligned} sRd \quad \text{sse} \quad f(s) \leq d, \\ s'R'd' \quad \text{sse} \quad f^{-1}(s') \leq d'. \end{aligned}$$

Si osservi che $I = R \bullet R'$. Infatti da $f(s) \leq d$ e $f^{-1}(d) \leq s'$ segue che $s = f^{-1}(f(s)) \leq f^{-1}(d) \leq s'$. Viceversa da $s \leq s'$ segue che $f(s) \leq f(s')$ cioè $sRf(s)$, $f^{-1}(f(s)) \leq s'$ cioè $f(s)R's'$. Analoghe considerazioni mostrano che $I = R' \bullet R$.

Viceversa sia R un isomorfismo nella categoria **BM**. Allora esiste R' tale che $I = R \bullet R'$ e $I = R' \bullet R$.

Si ponga $j = f(x)$ sse xRj e $jR'x$. Si osservi che se da xRj' segue che $f(x)R' \bullet Rj'$ pertanto $f(x) \leq j'$. Allora xRj sse $f(x) \leq j$. Analogamente si ponga $i = g(y)$ sse $yR'i$ e iRy . Otteniamo che $yR'i$ sse $g(y) \leq i$. Mostriamo che $g = f^{-1}$. Si osservi che da $xRf(x)$ e $f(x)R'x$ otteniamo $g(f(x)) \leq x$ e da $f(x)R'g(f(x))$ otteniamo $xR \bullet R'g(f(x))$ pertanto $x \leq g(f(x))$. Analoghe considerazioni mostrano che $f(g(y)) = y$.

Mostriamo che f preserva l'ordine. Sia $x \leq x'$; da $xRf(x)$ segue $xRf(x')$ pertanto $f(x) \leq f(x')$. Analogamente da $y \leq y'$ e $y'R'g(y')$ segue che $g(y) \leq g(y')$.

Ulteriori teoremi di corrispondenza

Dalla sintassi alla semantica

Proposizione 20. Un crivello θ soddisfa la proprietà di essere un elemento ciclico

$$p^* = {}^*p \text{ per ogni } p \in P$$

in una teoria di crivelli OU sse valge la seguente proposizione nell'universo U:

$$\exists \tau (\tau \text{ dec } \delta \text{ e } \tau / \theta) \text{ sse } \exists \tau' (\tau' \text{ dec } \delta \sigma \text{ e } \tau' / \theta).$$

Dimostrazione.

Analizziamo parte della condizione.

$$\frac{\frac{\frac{\forall p \ p^* \subseteq {}^*p}{\sigma \in p^*} \quad \frac{\sigma \notin {}^*p}{\sigma \in \theta}}$$

La condizione (*) non è più quantificata al secondo ordine : può essere negata nuovamente per poi essere esplicitata.

Error!

$\forall \sigma, \delta$

$\exists \tau (\tau_{dec} \sigma \delta \text{ e } \tau / 0) \Rightarrow$

$$\frac{\frac{\delta \notin \Diamond \{ \sigma \}}{\neg \forall \tau' \exists \delta' (\tau'_{dec} \delta \delta', \frac{\delta' \in \Diamond \{ \sigma \}}{\delta' \leq \sigma}) \Rightarrow \tau' . 0}}{\tau'_{dec} \delta \sigma}}{\exists \tau' (\tau'_{dec} \delta \sigma \text{ e } \tau / 0)}$$

Con ciò la proposizione è completamente dimostrata. Infatti poichè l'altra parte dell'uguaglianza $*p \emptyset p^*$ è duale a quella appena analizzata allora essa verrà tradotta nella condizione duale a quella appena trovata cioè:

$\forall \sigma, \delta$

$\exists \tau (\tau_{dec} \delta \sigma \text{ e } \tau / 0) \Rightarrow \exists \tau' (\tau'_{dec} \sigma \delta \text{ e } \tau' / 0)$

ma si osservi che tale condizione duale è equivalente alla prima, e ciò mostra attraverso la semantica l'equivalenza delle due semiuguaglianze.

Una dimostrazione diretta di tale osservazione può essere stabilita nel seguente modo:

Proposizione 21. Se per ogni $p \in P$ $p^* \emptyset *p$ allora $*p \emptyset p^*$ per ogni $p \in P$.

Dimostriamo dapprima che $p^* \emptyset *p$ implica che per ogni $p, q \in P$ se $p \bullet q \emptyset 0$ allora $q \bullet p \emptyset 0$.

Sia $p \bullet q \emptyset 0$, allora $q \emptyset p^* \emptyset *p$, pertanto $q \bullet p \emptyset 0$.

Da ciò segue che, poichè $*p \bullet p \emptyset 0$, allora $p \bullet *p \emptyset 0$ da cui $*p \emptyset p^*$.

Proposizione 22. $p^* = *p$ vale per ogni $p \in OU$, ove U è un universo per la logica lineare classica, sse $s = d$.

Infatti abbiamo visto che $p^* = *p$ vale in un universo sse \emptyset è simmetrica.

Supponiamo pertanto che \emptyset sia simmetrica. Da $d(\tau) \leq d(\tau)$ segue $\tau \emptyset d(\tau)$ ma allora $d(\tau) \emptyset \tau$, pertanto $s(\tau) \leq d(\tau)$. Analogamente da $s(\tau) \leq s(\tau)$ otteniamo $d(\tau) \leq s(\tau)$.

Viceversa supponiamo che $s = d$. Allora da $\sigma \emptyset \delta$ segue che $d(\sigma) \leq \delta$, cioè $s(\sigma) \leq \delta$ da cui deriviamo $\delta \emptyset \sigma$.

Esempi.

Sia F l'insieme delle frecce di una categoria piccola e sia U l'universo $\langle S, \leq, dec, 1 \rangle$ ove \leq è l'identità, $\tau dec \sigma \delta$ sse $\tau = \sigma \bullet \delta$. Allora:

3. \perp è ciclico sse ogni freccia ha uguale dominio e codominio.

La condizione di ciclicità è (§) $\forall \sigma, \delta \{ \text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\delta) \Rightarrow \text{cod}(\delta) = \text{dom}(\sigma) \}$.

La (§) implica che per $\delta = I_{\text{cod}(\sigma)}$ sia $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\sigma)$. Viceversa una qualsiasi categoria piccola ove per ogni freccia $\sigma \in S$ sia $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\sigma)$ soddisfa (§).

4. $1'$ è ciclico sse (§) $\forall \sigma, \delta \{ \sigma \bullet \delta = I_{\text{dom}(\sigma)} \Rightarrow \delta \bullet \sigma = I_{\text{cod}(\sigma)} \}$, cioè sse ogni sezione è un isomorfismo.

5. 1 è ciclico sse (§) $\forall \sigma, \delta \{ \exists \tau (\tau = \sigma \bullet \delta \text{ e } \tau \notin 1) \Rightarrow \exists \tau' (\tau' = \delta \bullet \sigma \text{ e } \tau' \notin 1) \}$.

La (§) implica che per $\sigma \notin 1$ e $\delta = I_{\text{cod}(\sigma)}$ sia $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\sigma)$. Pertanto scelta una categoria piccola dove ogni freccia abbia stesso dominio e codominio la (§) diventa

(§§) $\forall \sigma, \delta \{ \delta \bullet \sigma = I_{\text{cod}(\sigma)} \Rightarrow \sigma \bullet \delta = I_{\text{cod}(\sigma)} \}$.

Viceversa scelto un insieme di monoidi in ciascuno dei quali non vi siano inversi che non siano inversi bilateri, si osserva che tale categoria piccola soddisfa (§).

Proposizione 23. Un crivello 0 soddisfa la proprietà di non contraddizione:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \neq \perp \text{ per ogni } p \in P$$

in una teoria di crivelli OU sse valge la seguente proposizione nell'universo U:

$$1 \in 1 \Rightarrow \exists \tau (\tau \text{ dec } 1 \text{ e } \tau / 0).$$

Se U è un universo per la logica lineare classica allora la condizione è equivalente a:

$$1 \in 1 \Rightarrow s(1) \leq 1.$$

Dimostrazione.

La condizione proposta è $p \wedge p^* \wedge 1 = \perp$. Quindi:

$$\frac{\frac{\frac{\forall p \ p \wedge p^* \wedge 1 = \perp}{\neg \exists 1 \exists p (1 \in p \wedge p^* \wedge 1)}}{\exists 1 \{ 1 \in 1, \exists p (\frac{1 \in p}{\diamond\{1\} \neq p}, \frac{1 \in p^*}{\diamond\{1\} \neq p^*}) \}}}{\frac{p \neq * \diamond\{1\}}{\diamond\{1\} \neq * \diamond\{1\}}}}{\frac{\forall 1 \{ 1 \in 1 \Rightarrow \neg (\frac{\diamond\{1\} \neq * \diamond\{1\}}{\diamond\{1\} \bullet \diamond\{1\} \neq 0}) \}}{\exists \tau (\tau \text{ dec } 1 \text{ e } \tau / 0)}}$$

Si osservi che se U è un universo per la logica lineare classica allora la condizione trovata è $1 \in 1 \Rightarrow 1 \neq \perp$, e il conseguente è equivalente sia a $s(1) \leq 1$ sia a $d(1) \leq 1$.

Si consideri adesso un universo U in cui la relazione d'ordine sia l'identità. Allora la teoria di crivelli OU coincide con l'algebra dei sottoinsiemi PS. Vogliamo in questo contesto indagare le seguenti leggi di De Morgan:

$$[DM_1] \quad (p \bullet q)' = p' + q';$$

$$[DM_2] \quad (p + q)' = p' \bullet q'.$$

Si osservi che le due condizioni sono tra loro equivalenti. Pertanto l'analisi semantica delle due leggi analizzerà il principio $p + q = (p' \bullet q)'$ equivalente a $[DM_2]$. Tale principio è implicato dal suo parziale $p + q \emptyset (p' \bullet q)'$. Infatti da $q^{*'} + p^{*'} \emptyset (q^{*} \bullet p^{*})'$ segue $(p' \bullet q)' \emptyset (q^{*} \bullet p^{*})'$ da cui $*(q^{*} \bullet p^{*})' \emptyset *(p' \bullet q)'$ pertanto $(p + q)' \emptyset p' \bullet q'$.

Proposizione 24. Un sottoinsieme 0 soddisfa la proprietà di de Morgan:

$$p + q \emptyset (p' \bullet q)'$$
 per ogni $p, q \in P$

in una teoria classica di sottoinsiemi OU sse vale la seguente proposizione nell'universo U:

$$\tau dec \sigma \delta \Rightarrow d(\tau) dec d(\delta) d(\sigma).$$

Dimostrazione.

Si osservi innanzitutto che $\delta \in s^*$ sse $\forall \sigma (s(\delta) \leq \sigma \Rightarrow \sigma \notin s)$ e $\sigma \in *d$ sse $\forall \delta (d(\sigma) \leq \delta \Rightarrow \delta \notin d)$, condizioni che possono ridursi rispettivamente a $s(\delta) \notin s$ e $d(\sigma) \notin d$. Pertanto:

$$\frac{\tau \in p + q = *(q^{*} \bullet p^{*})}{d(\tau) \notin q^{*} \bullet p^{*}} \\ \frac{\neg \exists \sigma, \delta (d(\tau) dec \sigma \delta, \frac{\sigma \in q^{*}}{s(\sigma) \notin q}, \frac{\delta \in p^{*}}{s(\delta) \notin p})}{\exists \sigma, \delta (d(\tau) dec d(\sigma) d(\delta), \sigma \notin q, \delta \notin p)} \\ \forall \sigma, \delta (d(\tau) dec d(\sigma) d(\delta) \Rightarrow \sigma \in q \text{ o } \delta \in p)$$

La condizione proposta è:

$$\forall s, d \forall \tau \{ \tau \in s+d \Rightarrow \tau \in (s' \bullet d') \}$$

che può essere analizzata nei seguenti termini:

$$\neg \exists s, d, \exists \tau$$

$$\frac{\tau \in s+d}{\forall \sigma, \delta (d(\tau) \text{ decd}(\sigma) d(\delta) \Rightarrow \sigma \in d \text{ o } \delta \in s)} , \frac{\tau \notin (s' \bullet d')}{\frac{\tau \in s' \bullet d'}{\exists \sigma, \delta (\tau \text{ decd} \sigma, \sigma \in s', \delta \in d')}}$$

ovvero:

$$\neg \exists \tau, \sigma, \delta$$

$$\tau \text{ decd} \sigma$$

Error!

pertanto otteniamo:

$$\forall \tau, \sigma, \delta \tau \text{ decd} \sigma \Rightarrow d(\tau) \text{ decd}(\delta) d(\tau).$$

Dalla semantica alla sintassi

Proposizione 25. La seguente condizione

$$\exists \tau (\tau \text{ decd} \sigma \text{ e } \tau \not\vdash 0) \Rightarrow \exists \tau' (\tau' \text{ decd} \sigma \text{ e } \tau' \not\vdash 0)$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale in T la seguente condizione:

$$p^* \cap \emptyset^* p \text{ per ogni } p \in P.$$

Ricordiamo che per il lemma alla proposizione 13 in un universo di filtri primi la relazione $\sigma \not\vdash \delta$ é equivalente a $\sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset$. La condizione proposta è pertanto:

$$\forall \sigma, \delta \{$$

$$\sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset \Rightarrow \delta \cap \sigma^{*-1} = \emptyset \}$$

ovvero:

$$\frac{\frac{\forall \delta \{ \exists \sigma (\sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset, \frac{\delta \cap \sigma^{*-1} \neq \emptyset}{\exists d (d \in \delta, \frac{d \in \sigma^{*-1}}{d^* \in \sigma}) }) \Rightarrow \text{assurdo} \}}{\exists d (d \in \delta, \frac{\exists \sigma (\sigma \cap \delta^{*-1} = \emptyset, d^* \in \sigma)}{d^* \notin \delta^{*-1}})}}{\forall d, \forall \delta \{ d \in \delta \Rightarrow \frac{d^* \in \delta^{*-1}}{d^{**} \in \delta} \}}$$

Possiamo allora applicare il lemma di estensione/esclusione e otteniamo:

$$\forall d \quad d \notin d^{**},$$

condizione equivalente a:

$$\forall d \quad d^* \notin d.$$

Proposizione 26. La seguente condizione

$$1 \in \perp \Rightarrow \exists \tau (\tau \text{ dec } 1 \text{ e } 0 \notin \tau)$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale in T la seguente condizione:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \notin \perp \text{ per ogni } p \in P.$$

Dimostrazione.

$$\frac{\frac{\forall 1 \{ 1 \in 1 \Rightarrow \frac{\exists \tau (\tau \text{ dec } 1 \text{ e } 0 \notin \tau)}{1 \cap 1^{*-1} = \emptyset} \}}{\forall p (p \in 1 \Rightarrow p^* \notin 1)}}{\frac{\forall 1 \forall p \{ \frac{\neg (p \in 1 \Rightarrow p^* \notin 1)}{p \in 1, p^* \in 1} \Rightarrow 1 \notin 1 \}}{\frac{p \wedge p^* \in 1}{\forall p p \wedge p^* \wedge 1 = \perp}}}}$$

Proposizione 27. La seguente condizione

$$\tau \text{ dec } \sigma \delta \Rightarrow d(\tau) \text{ dec } d(\delta) d(\sigma)$$

vale in un universo di filtri primi $\bullet T$ sse vale in T la seguente condizione:

$$(*q)' \bullet (*p)' \notin (*p \bullet q)'$$
 per ogni $p, q \in P.$

Si osservi che la condizione semantica proposta implica che la relazione di specializzazione sia l'identità. Premettiamo una osservazione che permetterà di dimostrare questa asserzione.

Proposizione 28. La condizione

$$\tau \text{ dec } \sigma \delta \Rightarrow d(\tau) \text{ dec } d(\delta) d(\sigma)$$

implica

$$\iota \in 1 \Rightarrow \iota \leq s(\iota).$$

Infatti se $\iota \in 1$ allora da $\iota \text{ dec } j$, $j \in 1$ segue che $\iota \leq j$ pertanto $s(j) \leq s(\iota)$. ma da $\iota \text{ dec } j$ otteniamo $d(\iota) \text{ dec } d(j) d(\iota)$ e utilizzando la proposizione 6 otteniamo $j \text{ dec } d(\iota)$ pertanto $j \leq d(\iota)$ da cui $\iota \leq s(j) \leq s(\iota)$.

Proposizione 29. La condizione

$$\tau \text{ dec } \sigma \delta \Rightarrow d(\tau) \text{ dec } d(\delta) d(\sigma)$$

implica

$$\tau \leq \tau' \Rightarrow \tau' \leq \tau.$$

Da $\tau \leq \tau'$ segue che $\exists \iota \in 1$ tale che $\tau \text{ dec } \iota$, ma per la proposizione precedente $\iota \leq s(\iota)$ pertanto $\tau \text{ dec } s(\iota)$. Allora $d(\tau) \text{ dec } d(\iota)$ pertanto $d(\tau) \leq d(\iota)$ e $\tau' \leq \tau$.

La proposizione 29 serve a giustificare la scelta di analizzare la condizione semantica proposta dalla proposizione 27 in un universo di filtri primi di una algebra di Boole ove ogni filtro primo è un filtro massimale.

Dimostrazione della proposizione 27.

Analizziamo la condizione:

$$\forall \tau, \sigma, \delta \{ \tau \supseteq \sigma \otimes \delta \Rightarrow d(\tau) \supseteq d(\delta) \otimes d(\sigma) \}$$

che può essere riletta nel seguente modo:

$\forall \tau \{$

$$\exists \sigma, \delta (\tau \supseteq \sigma \otimes \delta , \frac{d(\tau) \underline{\neq} d(\delta) \otimes d(\sigma)}{\exists p, q (\frac{p \in d(\delta) \quad q \in d(\sigma) \quad p \bullet q \notin d(\tau)}{p \in {}^{*-1}\delta^c \quad q \in {}^{*-1}\sigma^c \quad *(p \bullet q) \in \tau}) }) \Rightarrow \text{assurdo} \}$$

$$\frac{\frac{\frac{p \notin \delta}{(*p)' \in \delta} \quad \frac{q \notin \sigma}{(*q)' \in \sigma}}{*(p \bullet q) \in \tau}}{\forall p, q (*q)' \bullet (*p)' \notin (*(p \bullet q))'}$$

Equivalentemente:

$$\frac{\forall p, q \forall \tau \{ \frac{\exists \sigma, \delta ((*p)' \in \delta, (*q)' \in \sigma, \tau \supseteq \sigma \otimes \delta)}{(*q)' \bullet (*p)' \in \tau} \Rightarrow \frac{*(p \bullet q) \notin \tau}{(*(p \bullet q))' \in \tau} \}}{\forall p, q (*q)' \bullet (*p)' \notin (*(p \bullet q))'}$$

Si osservi infine che in una teoria lineare classica la condizione trovata:

$$(*q)' \bullet (*p)' \notin (*(p \bullet q))' \text{ per ogni } p, q \in P$$

è equivalente a:

$$(p \bullet q)' \notin p' + q' \text{ per ogni } p, q \in P.$$

Vale $*(p') = (*p)'$ e analogamente per l'altra negazione. Infatti $*p \vee *(p') = *(p \wedge p') = * \perp = T$ e $*p \wedge *(p') = *(p \vee p') = *T = \perp$. Pertanto $(*q)' \bullet (*p)' \notin (*(p \bullet q))'$ sse $*(q)' \bullet *(p') = *(((*q)' \bullet *(p'))^*) = *(p' + q') \notin *((p \bullet q))'$ e ciò è equivalente a $(p \bullet q)' \notin p' + q'$.

Analisi della condizioni semantica associata all' assioma di non contraddizione: $p \wedge p^* \wedge 1 \notin \perp$.

Sia $U = \langle S, \leq, dec, 1, 0, d, s \rangle$ un universo per la logica lineare classica .

Per ipotesi valga in U:

$$\forall t \quad t \in 1 \Rightarrow s(t) \leq t.$$

Proposizione 30. Siano $\sigma, \delta \in 1$. Allora $\sigma \leq \delta$ implica $\sigma = \delta$.

Si osservi che $s(\iota) \leq \iota$ implica $s(\iota) \in 1$, pertanto $s(s(\iota)) \leq s(\iota)$, da cui otteniamo che $\iota \leq s(\iota)$, pertanto $s(\iota) = \iota$. Pertanto se $\sigma \leq \delta$ allora $s(\delta) \leq s(\sigma)$ cioè $d \leq \sigma$ e $\sigma = \delta$.

Poichè abbiamo così visto che la relazione di specializzazione ristretta a 1 è l'identità possiamo aspettarci che l'insieme delle parti di 1 si dimostri essere una algebra di Boole. Infatti vale il seguente risultato sintattico:

Proposizione 31. Sia T una teoria lineare classica in cui vale la legge di non contraddizione $p \wedge p^* \wedge 1 = \perp$. Allora vale:

$$i \notin 1 \Rightarrow (i \wedge i^* = \perp, i \vee i^* = T).$$

Dimostrazione.

$i \wedge i^* = (i \wedge 1) \wedge i^* = i \wedge i^* \wedge 1 = \perp$, da $p \wedge p^* \wedge 1 = \perp$ per ogni p otteniamo $*p \wedge (*p)^* \wedge 1 = \perp$ da cui, passando alla negazione lineare, otteniamo $T = p \vee p^* \vee 0$ e se $i \notin 1$ allora $0 \notin i^*$, pertanto $i \vee i^* = i \vee (i^* \vee 0) = T$.

Tuttavia vale anche il viceversa:

Proposizione 32. Sia T una teoria lineare classica in cui vale:

$$i \notin 1 \text{ implica } i \wedge i^* = \perp, i \vee i^* = T.$$

Allora vale la legge di non contraddizione $p \wedge p^* \wedge 1 = \perp$.

Dimostrazione.

Si ricordi che $0 = 1^*$ e si osservi che $p \wedge p^* \wedge 1 = (p \wedge 1) \wedge (p^* \wedge 1) = \perp$ poichè $p^* \wedge 1 \notin p^* \vee 0 = (p \wedge 1)^*$.

Corollario. L'insieme delle proposizioni che dimostrano il vero lineare è un algebra di Boole. Infatti se $i \neq 1$ allora $i \wedge (i^* \wedge 1) = i \wedge i^* = \perp$ e $i \vee (i^* \wedge 1) = (i \vee i^*) \wedge (i \vee 1) = \top \wedge 1 = 1$.

Proposizione 33. Siano $\sigma_{dec}\iota$ e $\sigma_{dec}\kappa$, $\iota, \kappa \in 1$. Allora $\iota = \kappa$.

Da $\sigma_{dec}\iota$ otteniamo $s(\iota)_{dec}(\sigma)\sigma$, cioè $\iota_{dec}(\sigma)\sigma$. Da $\sigma_{dec}\kappa$ e per l'associatività otteniamo che $\exists \zeta \iota_{dec}\zeta\kappa$ e $\zeta_{dec}(\sigma)\sigma$ ma allora $\iota \leq \zeta$ e da $s(\zeta) \leq \iota$ segue che $\zeta = \iota$. Pertanto $\iota \leq \kappa$ e $\iota = \kappa$.

Corollario. Siano $\delta_{dec}\iota$ e $\delta_{dec}\kappa$, $\iota, \kappa \in 1$. Allora $\iota = \kappa$.

Definizione 3.

$\iota = \text{cod}(\sigma)$ sse $\iota \in 1$ e $\sigma_{dec}\iota$,

$\iota = \text{dom}(\delta)$ sse $\iota \in 1$ e $\delta_{dec}\iota$.

Proposizione 34. Se $\alpha \leq \beta$ allora $\text{cod}(\alpha) = \text{cod}(\beta)$ e $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$.

Infatti da $\alpha_{dec}\alpha\text{cod}(\alpha)$ e $\beta_{dec}\beta\text{cod}(\beta)$ otteniamo $\alpha_{dec}\beta\text{cod}(\alpha)$ e $\exists \zeta \alpha_{dec}\beta\zeta$ e $\zeta_{dec}\text{cod}(\beta)\text{cod}(\alpha)$ da cui deduciamo che $\text{cod}(\beta) = \text{cod}(\alpha)$.

Proposizione 35. (1) $\exists \tau \tau_{dec}\sigma$ sse (2) $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\delta)$.

(1) implica (2). Da $\tau_{dec}\sigma$ e $\sigma_{dec}\sigma\text{cod}(\sigma)$ segue $\exists \xi \tau_{dec}\sigma\xi$ e $\xi_{dec}\text{cod}(\sigma)\delta$. Da cui $\xi_{dec}\text{cod}(\sigma)\delta$ e $\delta_{dec}\text{dom}(\delta)\delta$ otteniamo che $\exists \zeta \xi_{dec}\zeta\delta$ e $\zeta_{dec}\text{cod}(\sigma)\text{dom}(\delta)$ da cui deduciamo $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\delta)$.

(2) implica (1). Da $\delta_{dec}\text{dom}(\delta)\delta$ segue $\text{dom}(\delta)_{dec}\delta\delta$ e per $\sigma_{dec}\sigma\text{dom}(\delta)$ segue per l'associatività $\exists \zeta \sigma_{dec}\zeta\delta$, $\zeta_{dec}\sigma$.

Proposizione 36. Se $\tau_{dec}\sigma$ allora $\text{dom}(\tau) = \text{dom}(\sigma)$ e $\text{cod}(\tau) = \text{cod}(\delta)$.

Da $\tau_{dec}\sigma\delta$ e $\sigma_{dec}\text{dom}(\sigma)\sigma$ segue che esiste uno ζ tale che $\tau_{dec}\text{dom}(\sigma)\zeta$ e $\zeta_{dec}\sigma\delta$, da cui $\tau \leq \zeta$ e $\text{dom}(\tau) = \text{dom}(\zeta)$.

Proposizione 37. $\text{cod}(\zeta) = \text{dom}(d(\zeta))$, $\text{dom}(\zeta) = \text{cod}(s(\zeta))$.

Analogamente $\text{cod}(s(\zeta)) = \text{dom}(\zeta)$, $\text{cod}(\zeta) = \text{dom}(s(\zeta))$.

Si ottiene subito il risultato osservando $\exists \tau(\tau_{dec}\zeta d(\zeta) \tau / 0)$ e applicando le osservazioni precedenti.

Proposizione 38. Se $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$, allora $\exists \zeta \zeta_{dec}d(\beta)\alpha$ tale che $\alpha_{dec}\beta\zeta$.

Se $\text{cod}(\alpha) = \text{cod}(\beta)$, allora $\exists \zeta \zeta_{dec}\alpha s(\beta)$ tale che $\alpha_{dec}\zeta\beta$.

Da $\alpha_{dec}\text{dom}(\alpha)\alpha$ e $\text{dom}(\alpha)_{dec}\beta d(\beta)$ segue che $\exists \zeta$ tale che $\alpha_{dec}\beta\zeta$ e $\zeta_{dec}d(\beta)\beta$.

Analogamente si dimostra l'altra osservazione.

Proposizione 39. $\exists \zeta \zeta_{dec}d(\delta)\delta$, $\exists \xi \xi_{dec}\sigma s(\sigma)$.

E' conseguenza immediata dell'osservazione precedente in quanto vale $\text{dom}(\delta) = \text{dom}(\delta)$, $\text{cod}(\sigma) = \text{cod}(\sigma)$.

Proposizione 40. $\tau_{dec}\sigma\delta$ implica $\exists \zeta \zeta_{dec}s(\delta)d(\sigma)$

Da $\tau_{dec}\sigma\delta$ segue $\text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\delta)$ e $\text{dom}(d(\sigma)) = \text{cod}(\sigma) = \text{dom}(\delta) = \text{cod}(s(\delta))$.

Per l'osservazione 3 otteniamo $\exists \zeta \zeta_{dec}s(\delta)d(\sigma)$.

Proposizione 41. Se $\tau_{dec}\sigma\delta$ implica $\tau \in 1$ allora:

- (1) $d(\sigma) = s(\sigma)$;
- (2) $\tau_{dec}\sigma\delta$ implica $d(\tau)_{dec}d(\delta)d(\sigma)$.
- (3) $\tau_{dec}\sigma\delta$, $\tau'_{dec}\sigma\delta$ implica $\tau = \tau'$.

(1) Sia $\tau = \text{cod}(\tau) = \text{dom}(d(\tau))$. Allora $d(\tau) \text{dec} d(\tau)$ e $\tau \text{dec} s(\tau)$. Allora $\exists \zeta$ $d(\tau) \text{dec} s(\tau) \zeta$ e $\zeta \text{dec} d(\tau)$, ma $\zeta \in 1$ pertanto $d(\tau) \leq s(\tau)$. Con un ragionamento speculare otteniamo $s(\tau) \leq d(\tau)$.

(2) Per (1) poniamo $i(\tau) := d(\tau) = s(\tau)$.

Sia $\tau \text{dec} \sigma \delta$, allora $\exists \zeta \zeta \text{dec} i(\delta) i(\sigma)$. Poichè $\text{cod}(\zeta) = \text{cod}(i(\sigma)) = \text{dom}(\sigma) = \text{dom}(\tau)$, allora $\exists \xi \xi \text{dec} \zeta \tau$. Per l'associatività $\exists \kappa \xi \text{dec} i(\delta) \kappa$ e $\kappa \text{dec} i(\sigma) \tau$. Ma ricordando che $\tau \text{dec} \sigma \delta$ otteniamo che $\exists \chi \kappa \text{dec} \chi \delta$ e $\chi \text{dec} i(\sigma) \sigma$ pertanto $\chi \in 1$ e $\kappa \leq \delta$, da cui $\xi \text{dec} i(\delta) \delta$, pertanto $\xi \in 1$, cioè $\xi \text{Error! 0}$ e $\zeta \text{Error! } \tau$, pertanto $i(\tau) \leq \zeta$ e $i(\tau) \text{dec} i(\delta) i(\sigma)$.

(3) Siano $\tau \text{dec} \sigma \delta$ e $\tau' \text{dec} \sigma \delta$. Con un ragionamento analogo poniamo $\zeta = i(\tau')$ seguendo gli stessi passi di prima otteniamo $i(\tau) \leq i(\tau')$. Invertendo i ruoli otteniamo $i(\tau') \leq i(\tau)$, pertanto $i(\tau) = i(\tau')$ implica $\tau = \tau'$.

Derivabilità e indipendenza degli gli assiomi analizzati

Proposizione 42. I seguenti assiomi:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \in \perp,$$

$$p^* \in \perp * p$$

sono derivabili a partire dalle leggi di De Morgan:

$$(p+q)' = p' \bullet q'.$$

Dimostrazione.

Si osservi che $1'$ è elemento neutro rispetto all'operazione $+$ e per l'unicità dell'elemento neutro segue che $1' = 0$.

Mostriamo pertanto che

$$(i) \quad 1' = 0$$

è equivalente a:

$$(ii) \quad p \in \perp \text{ implica } p \wedge p^* = \perp \text{ e } p \vee p^* = T,$$

condizione che già abbiamo mostrato (proposizioni 31-32) essere equivalente a:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \neq \perp.$$

E' immediato osservare che (ii) implica (i) poichè nel caso particolare un cui $p = 1$ si ottiene $1 \wedge 0 = \perp$ e $1 \vee 0 = T$, pertanto l'uguaglianza segue per l'unicità del complemento.

Assumiamo (i) e dimostriamo (ii).

Si osservi che $*p' \bullet p \wedge 0' = \perp$ è equivalente a $p = \perp$. Infatti $*p' \bullet p \wedge 0' = \perp$ sse $*p' \bullet p \neq 0$ sse $*p' \neq *p$ sse $p \neq p'$ sse $p \neq \perp$. Analogamente $p \bullet p^* \wedge 0' = \perp$ è equivalente a $p = \perp$.

Dimostriamo che da $p \neq 1$ segue che $p \wedge p^* = \perp$ e $p \vee p^* = T$.

Sia $p \neq 1$. Allora $p^* \neq 1$, per cui vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} (p \wedge *p) \bullet (p \wedge *p)^* \wedge 0' &= (p \wedge *p) \bullet (p \wedge *p)^* \wedge 1 = (p \wedge *p) \bullet (p^* \wedge p') \wedge 1 = (p \wedge *p) \bullet (p^* \wedge p') = \\ &= (p \wedge *p) \bullet (p^* \wedge p') \neq p \wedge p' = \perp. \end{aligned}$$

Pertanto $p \wedge p^* = \perp$ da cui $p \vee p^* = (p \wedge p^*)^* = \perp^* = T$. Analogamente troviamo che $p \wedge p^* = \perp$.

Mostriamo l'altra derivazione.

Da $p' \neq p'$ segue che $1 \neq p \setminus p' = p^* \vee p' = (p^* \bullet p)'$ pertanto $p^* \bullet p \neq 0$ e $p^* \neq 0/p = *p$.

Proposizione 43. I seguenti assiomi:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \neq \perp,$$

$$p^* \neq *p,$$

$$(p+q)' = p' \bullet q',$$

non sono derivabili a partire dal seguente:

$$*(p^*) = p = (*p)^*.$$

Dimostrazione.

Esibiremo un universo dove vale l'ultimo assioma ma non gli altri tre.

Sia I un insieme e sia $\psi: I \longrightarrow I$ una corrispondenza biunivoca in questo insieme.

Sia $S = \{ l_i, \psi_i \mid i \in I \}$ ordinato dalla relazione d'identità in modo tale che $1 = 0 = \{ l_i \mid i \in I \}$. Si definisca in S la seguente funzione parziale:

$$\begin{cases} l_i \bullet l_i = l_i \\ l_i \bullet \psi_i = \psi_i \\ \psi_i \bullet l_{\psi(i)} = \psi_i, \text{ per ogni } i \in I \end{cases}$$

e poniamo $\tau_{dec} \sigma \delta$ sse $\tau = \sigma \bullet \delta$.

Sia $d: S \longrightarrow S$ la corrispondenza biunivoca così definita:

$$\begin{cases} d(l_i) = \psi_i \\ d(\psi_i) = l_{\psi(i)} \end{cases}$$

Poichè che la relazione ternaria è una funzione parziale per controllare che essa soddisfa la proprietà associativa basta osservare che se $\tau = (\sigma \bullet \gamma) \bullet \delta$ allora $\tau = \sigma \bullet (\gamma \bullet \delta)$.

La proposizione è vera se $\tau \in 1$ poichè allora $\sigma = \gamma = \delta = \tau$.

Sia $\tau \notin 1$, cioè $\tau = \psi_i$, allora è $l_i \bullet \psi_i = \psi_i$ o $\psi_i \bullet l_{\psi(i)} = \psi_i$. Nel primo caso abbiamo $\sigma \bullet \gamma = \sigma = \gamma = l_i$ e $\delta = \tau = \psi_i$ pertanto $\sigma \bullet (\gamma \bullet \delta) = l_i \bullet (l_i \bullet \psi_i) = l_i \bullet \psi_i = \psi_i = \tau$.

Nel secondo caso otteniamo che $\tau = \sigma \bullet \gamma = \psi_i$ e $\delta = l_{\psi(i)}$. Osserviamo che $\sigma \bullet \gamma = \psi_i$ sse $\sigma = \psi_i$ e $\delta = l_{\psi(i)}$ oppure $\sigma = l_i$, $\delta = \psi_i$. In ogni caso abbiamo che $\sigma \bullet (\gamma \bullet \delta) = \psi_i$.

Analoghe considerazioni portano a dimostrare che se $\tau = \sigma \bullet (\gamma \bullet \delta)$ allora $\tau = (\sigma \bullet \gamma) \bullet \delta$.

Si osservi che l'universo U soddisfa gli assiomi sull'unità e quelli relativi alla relazione binaria \emptyset . Tuttavia non soddisfa $p \wedge p^* \wedge 1 \emptyset \perp$ (e quindi non soddisfa le leggi di De Morgan) in quanto $0 = 1$ anzichè $0 = 1'$. In generale U

non soddisfa neanche $p^* \emptyset *p$ poichè d non è in generale una involuzione. Si consideri ad esempio $I = \{\alpha, \beta\}$ con $\psi(\alpha) = \beta$, $\psi(\beta) = \alpha$. In tal caso d ha periodo 4.

Come corollario alla discussione precedente possiamo enunciare la seguente proposizione:

Proposizione 44. I seguenti assiomi:

$$p \wedge p^* \wedge 1 \emptyset \perp,$$

$$(p+q)' = p' \bullet q',$$

non sono derivabili a partire dai seguenti:

$$*(p^*) = p = (*p)^*,$$

$$p^* \emptyset *p.$$

E' sufficiente esibire un universo costruito nella stessa maniera di prima in cui d abbia periodo 2. Si ponga ad esempio $I = \{\alpha\}$ e sia ψ sia l'identità.

Proposizione 45. I seguenti assiomi:

$$(p+q)' = p' \bullet q',$$

$$p^* \emptyset *p,$$

non sono derivabili a partire dai seguenti:

$$*(p^*) = p = (*p)^*,$$

$$p \wedge p^* \wedge 1 \emptyset \perp.$$

Dimostrazione.

(2) Sia S un insieme (ordinato dall'identità) con un elemento $1 \in S$ assegnato e sia d una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di S tale che $d(1) = 1$. Si definisca in S una relazione ternaria di decomposizione nella seguente maniera:

$$\tau dec \sigma \delta sse \begin{cases} \sigma = 1 \text{ e } \tau = \delta, \\ \delta = 1 \text{ e } \tau = \sigma, \\ \delta = d(\sigma) \text{ e } \tau = 1, \\ \sigma \neq 1 \neq \delta \neq d(\sigma) \text{ e } \tau \neq 1 \end{cases}$$

Si ponga $1 = \{1\}$ e sia $0 = 1'$; si osservi che è soddisfatta la condizione:

$$\exists \tau (\tau dec \sigma \delta \tau \neq 0) \quad sse \quad d(\sigma) = \delta \quad sse \quad s(\delta) = \sigma.$$

Sono pure soddisfatte le condizioni sull'unità, il controllo sull'associatività deve mostrare che:

$$(\{\sigma\} \bullet \{\gamma\}) \bullet \{\delta\} = \{\sigma\} \bullet (\{\gamma\} \bullet \{\delta\}) \text{ per ogni } \sigma, \gamma, \delta \in S,$$

ove $\tau \in \{\sigma\} \bullet \{\delta\}$ sse $\tau dec \sigma \delta$.

La proposizione è vera se $\{\sigma, \gamma, \delta\} \cap \{1\} \neq \perp$.

Siano $\sigma, \gamma, \delta \in 0$. Allora $T = \{s(\delta)\} \bullet \{\delta\} \subseteq 0 \otimes \{\delta\} \subseteq (\{\sigma\} \bullet \{\gamma\}) \bullet \{\delta\}$ e analogamente $T = \{\sigma\} \bullet \{d(\sigma)\} \subseteq \{\sigma\} \bullet 0 \subseteq \{\sigma\} \bullet (\{\gamma\} \bullet \{\delta\})$.

Si consideri pertanto $S = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$ e sia d la permutazione $(1)(\alpha, \beta, \gamma)$. Poiché d ha periodo 3 il modello non soddisfa la ciclicità e pertanto neanche le leggi di De Morgan, mentro soddisfa il principio di non contraddizione perchè $1 \in 1$ implica $d(1) = 1$.

Proposizione 46. Sia $U = \langle S, =, dec, 1 \rangle$ un universo costruito a partire dall'insieme delle frecce di una categoria piccola. Tale universo soddisfa gli assiomi

$$*(p^*) = p = (*p)^*, \quad p \wedge p^* \wedge 1 \notin \perp,$$

se e solo se è la categoria è gruppoide (proposizioni 17 - 40). Tuttavia i gruppoidi soddisfano sempre assiomi inderivabili

$$(p+q)' = p' \bullet q', \quad p^* \notin *p,$$

pertanto non sono universi completi per la logica lineare classica distributiva.

Si tratta di dimostrare che l'inverso sinistro coincide con l'inverso destro.

Infatti $s(\sigma) = s(\sigma) \bullet I_{\text{dom}(\sigma)} = s(\sigma) \bullet (\sigma \bullet d(\sigma)) = (s(\sigma) \bullet \sigma) \bullet d(\sigma) = I_{\text{cod}(\sigma)} \bullet d(\sigma) = d(\sigma)$.

Pertanto d ha periodo minore uguale a 2.

Inoltre è noto che se $\tau = \sigma \bullet \delta$ allora $\tau^{-1} = \delta^{-1} \bullet \sigma^{-1}$, cioè $d(\tau) \text{dec} d(\delta) d(\sigma)$.

Proposizione 47. Il seguente assioma:

$$(p+q)' = p' \bullet q',$$

non è derivabile a partire dai seguenti:

$$*(p^*) = p = (*p)^*,$$

$$p \wedge p^* \wedge 1 \notin \perp,$$

$$p^* \notin *p.$$

Sia $U = \langle S, =, \text{dec}, 1, 0, d \rangle$ l'universo così costituito:

$S = \{1, \alpha, \beta\}$, $1 = \{1\}$, $0 = \{\alpha, \beta\}$, sia d la permutazione $(1)(\alpha, \beta)$. La relazione

ternaria è data dalla seguente tavola di composizione:

<i>dec</i>	1	α	β	
	1	α	β	
	α	β	1, α	
	β	β	1, α	α, β

Si osservi che $\alpha \text{dec} \beta \alpha$ ma non $d(\alpha) \text{dec} d(\alpha) d(\beta)$, cioè $\beta \text{dec} \beta \alpha$.

Per verificare che tale tavola di composizione è associativa si osservi che essa è gode della proprietà commutativa. Pertanto sarà sufficiente dimostrare che $(\{x\} \bullet \{x\}) \bullet \{y\} = \{x\} \bullet (\{x\} \bullet \{y\})$ per $x, y \in 0$ e $x \neq y$. Per $x = \alpha$ $(\{\alpha\} \bullet \{\alpha\}) \bullet \{\beta\} = \{\alpha, \beta\} \bullet \{\beta\} = \{1, \beta\} \cup \{\alpha\} = T$, $\{\alpha\} \bullet (\{\alpha\} \bullet \{\beta\}) = \{\alpha\} \bullet \{1, \beta\} = \{\alpha\} \cup \{1, \beta\} = T$.

Per $x = \beta$ $(\{\beta\} \bullet \{\beta\}) \bullet \{\alpha\} = \{\alpha\} \bullet \{\alpha\} = \{\alpha, \beta\}$, $\{\beta\} \bullet (\{\beta\} \bullet \{\alpha\}) = \{\beta\} \bullet \{1, \beta\} = \{\beta\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \beta\}$.

Capitolo VI

Definibilità

Abbiamo mostrato nei capitoli precedenti che la validità di certe condizioni sintattiche in un universo è equivalente alla validità di corrispondenti condizioni semantiche. Abbiamo osservato che in linea di principio la ricerca può procedere in senso inverso: date certe condizioni semantiche si tratta di cercare condizioni sintattiche equivalenti, eventualmente lavorando nel modello generico dei filtri primi. In questo capitolo mostreremo che non ogni condizione semantica ha un equivalente sintattico, in particolare non è possibile esprimere nella sintassi il fatto che l'universo è una categoria oppure un monoide. Per ottenere questi risultati generalizzeremo il concetto di p-morfismo tra universi della logica modale al caso della congiunzione e implicazione lineare. Richiederemo che la funzione inversa di un p-morfismo preservi tutti gli operatori logici. La prima parte di questo capitolo è dedicata a questo studio. Per mostrare che talune condizioni semantiche non sono definibili esibiremo due universi nel primo dei quali la condizione semantica vale mentre non vale nel secondo; inoltre esibiremo un p-morfismo suriettivo tra i due universi. Supposto che tale condizione sia definibile attraverso una condizione sintattica giungeremo ad una contraddizione: nel primo universo tale condizione è valida per le ipotesi sull'universo e contemporaneamente non può essere valida per le proprietà di preservazione della funzione inversa.

Preservazione degli operatori da parte dei morfismi

Proposizione 1. La proprietà di semipreservazione:

$$\text{Of}(s) \bullet \text{Of}(d) \not\subseteq \text{Of}(s \bullet d)$$

è valida tra due teorie di crivelli $\text{OU}_2 \text{ OU}_1$ sse $f: \text{U}_1 \longrightarrow \text{U}_2$ preserva la relazione ternaria:

$$\tau \text{dec} \sigma \delta \Rightarrow f(\tau) \text{dec} f(\sigma) f(\delta).$$

Tale proposizione era già stata enunciata e dimostrata nel terzo capitolo al numero 16.

Proposizione 2. La proprietà di semipreservazione:

$$\text{Of}(s \bullet d) \not\subseteq \text{Of}(s) \bullet \text{Of}(d)$$

è valida tra due teorie di crivelli $\text{OU}_2 \text{ OU}_1$ sse $f: \text{U}_1 \longrightarrow \text{U}_2$ soddisfa la seguente proposizione:

$$f(\tau) \text{dec} \sigma' \delta' \Rightarrow \exists \sigma, \delta (\tau \text{dec} \sigma \delta , f(\sigma) \leq \sigma' , f(\delta) \leq \delta').$$

Dimostrazione.

$\forall s, d \forall \tau$

$$\frac{\tau \in \text{Of}(s \bullet d)}{f(\tau) \in s \bullet d}$$

$$\frac{}{\exists \sigma', \delta' (f(\tau) \text{dec} \sigma' \delta' , \sigma' \in s , \delta' \in d)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau \in \text{Of}(s) \bullet \text{Of}(d)}{\exists \sigma, \delta (\tau \text{dec} \sigma \delta , \frac{\sigma \in \text{Of}(s)}{f(\sigma) \in s} , \frac{\delta \in \text{Of}(d)}{f(\delta) \in d})}$$

equivalentemente:

$\forall \tau, \sigma', \delta'$

$$f(\tau) \text{dec} \sigma' \delta' \Rightarrow$$

$$\forall s, d ((\sigma' \in s , \delta' \in d) \Rightarrow \exists \sigma, \delta (\tau \text{dec} \sigma \delta , f(\sigma) \in s , f(\delta) \in d))$$

Il conseguente è equivalente a:

$$\exists \sigma, \delta (\tau_{dec} \sigma \delta, f(\sigma) \in \hat{\Delta} \{ \sigma' \}, f(\delta) \in \hat{\Delta} \{ \delta' \}),$$

cioè:

$$\exists \sigma, \delta (\tau_{dec} \sigma \delta, f(\sigma) \leq \sigma', f(\delta) \leq \delta').$$

Proposizione 3. La proprietà di semipreservazione:

$$Of(s) \setminus Of(t) \not\subseteq Of(st)$$

è valida tra due teorie di crivelli $OU_2 \text{ } OU_1$ sse $f:U_1 \longrightarrow U_2$ soddisfa la seguente proposizione:

$$\tau'_{dec} \sigma' f(\delta) \quad \Rightarrow \quad \exists \sigma, \tau (\tau_{dec} \sigma \delta, f(\sigma) \leq \sigma', \tau' \leq f(\tau))$$

Dimostrazione.

Si osservi che la condizione:

$$Of(s) \setminus Of(t) \not\subseteq Of(st)$$

è equivalente alla condizione:

$$s \bullet \exists_f (Of(s) \setminus Of(t)) \not\subseteq t$$

ove \exists_f è aggiunto sinistro di Of ed è definito da:

$$\sigma' \in \exists_f(p) \text{ sse } \exists \sigma \in p \text{ tale che } \sigma' \leq f(\sigma).$$

$$\forall s, t \forall \tau' \quad \tau' \in s \bullet \exists_f (Of(s) \setminus Of(t)) \Rightarrow \tau' \in t$$

cioè:

$$\neg \exists \tau', s, t (\text{Error! , Error!})$$

La parte negata è equivalente a:

$$\exists \tau', \sigma', \delta'$$

$$\tau'_{dec} \sigma' \delta',$$

Error!

che per le proprietà della relazione ternaria è equivalente a:

$\exists \tau', \sigma', \delta (\tau' dec \sigma' f(\delta) , \forall \sigma, \tau (\tau dec \sigma \delta , f(\sigma) \leq \sigma') \Rightarrow \tau' \text{ Error! } f(\tau)))$

Negando nuovamente otteniamo la condizione voluta:

$\forall \tau', \sigma', \delta (\tau' dec \sigma' f(\delta) \Rightarrow \exists \sigma, \tau (\tau dec \sigma \delta , f(\sigma) \leq \sigma' , \tau \leq f(\tau))) .$

Proposizione 4. La proprietà di semipreservazione:

$$Of(t)/Of(d) \emptyset Of(t/d)$$

è valida tra due teorie di crivelli $OU_2 \text{ } OU_1$ sse $f:U_1 \longrightarrow U_2$ soddisfa la seguente proposizione:

$$\tau' dec f(\sigma) \delta' \quad \Rightarrow \quad \exists \delta, \tau (\tau dec \sigma \delta , f(\delta) \leq \delta' , \tau \leq f(\tau)) .$$

La dimostrazione viene ottenuta per dualità.

Proposizione 5. Sia $\mu:T_1 \longleftarrow \text{---} T_2$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\mu(s) \bullet \mu(d) \emptyset \mu(s \bullet d), \quad \mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(t), \quad \mu(t/d) \emptyset \mu(t) / \mu(d).$$

Infatti se vale la prima condizione otteniamo $\mu(s) \bullet \mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s \bullet s \setminus t) \emptyset \mu(t)$ cioè $\mu(s \setminus t) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(t)$. Viceversa se vale la seconda da $s \bullet d \emptyset s \bullet d$ otteniamo $d \emptyset s \setminus s \bullet d$, pertanto $\mu(d) \emptyset \mu(s \setminus s \bullet d) \emptyset \mu(s) \setminus \mu(s \bullet d)$, pertanto $\mu(s) \bullet \mu(d) \emptyset \mu(s \bullet d)$.

Proposizione 6. Sia $f:U_1 \longrightarrow U_2$ un morfismo tra universi. Allora valgono le seguenti condizioni:

$$Of(s \bullet d) = Of(s) \bullet Of(d) ,$$

$$Of(s \setminus t) = Of(s) \setminus Of(t) ,$$

$$Of(t/d) = Of(t) / Of(d) ,$$

se e solo se f soddisfa le seguenti:

$$\tau dec \sigma \delta \Rightarrow f(\tau) dec f(\sigma) f(\delta) ,$$

$$f(\tau) dec \sigma' \delta' \Rightarrow \exists \sigma, \delta (\tau dec \sigma \delta , f(\sigma) \leq \sigma' , f(\delta) \leq \delta') ,$$

$$\tau' dec \sigma' f(\delta) \Rightarrow \exists \sigma, \tau (\tau dec \sigma \delta , \tau \leq f(\tau) , f(\sigma) \leq \sigma') ,$$

$$\tau' \text{dec}(\sigma)\delta' \Rightarrow \exists \delta, \tau (\tau \text{dec} \sigma \delta, \tau' \leq f(\tau), f(\delta) \leq \delta')$$

Teoremi di indefinibilità

Definizione 1. Chiamiamo schema una astratta funzione polinomiale definita attraverso gli operatori della logica con uguale dominio e codominio.

Definizione 2. Diciamo che una condizione semantica è definibile attraverso uno schema ψ di n variabili se la sua validità è in un universo U è equivalente alla validità dello schema nella teoria dei crivelli:

$$\forall p_1, \dots, p_n \in OU \psi(p_1, \dots, p_n) = T.$$

Proposizione 7. La seguente condizione semantica:

$$(*) \tau \text{dec} \sigma \delta, \tau' \text{dec} \sigma \delta \Rightarrow \tau = \tau'$$

non è definibile attraverso schemi in una teoria lineare classica distributiva con complemento .

Dimostrazione.

Sia Z_3 il gruppo ciclico di ordine 3 di cui riportiamo la tavola di composizione:

<i>dec</i>	1	α	β
1	1	α	β
α	α	β	1
β	β	1	α

Ricordiamo ogni gruppo è un universo per la logica lineare classica quando si ponga $1 = \{1\}$, $0 = 1'$.

Sia $(_)^{-1}: Z_3 \longrightarrow Z_3$ l'isomorfismo che associa a a ogni elemento di Z_3 il suo inverso. Sia $F: Z_2 \longrightarrow \mathbf{Mon}$ il funtore che associa all'unico oggetto di Z_2 il gruppo Z_3 e alla freccia di periodo 2 l'automorfismo $(_)^{-1}$ di Z_3 . Come abbiamo visto nel capitolo 4 possiamo costruire un monoide nella categoria

dei bimoduli a partire da questa struttura. Poichè in Z_2 ogni freccia ha inverso allora l'ordine nella struttura risultante sarà l'identità. Riportiamo la tavola di composizione di Z_3 quozientato rispetto alla relazione \equiv "equiraggiungibilità".

$$\begin{array}{ccc} dec & [1] & [\alpha] \\ [1] & [1] & [\alpha] \\ [\alpha] & [\alpha] & [1],[\alpha] \end{array}$$

Si osservi che $[1] = \{ 1 \}$ e $[\alpha] = \{ \alpha, \beta \}$. Tale struttura è inoltre un modello per la logica lineare classica, ove $1 = \{ [1] \}$ e $0 = \{ [\alpha] \}$ e d è l'identità.

Sia $[]:Z_3 \longrightarrow \frac{Z_3}{\equiv}$ la funzione che associa a ogni elemento di Z_3 la sua classe di equivalenza.

Lemma. $[]$ è un morfismo di universi.

Infatti da $\tau dec \sigma \delta$, cioè $\tau = \sigma \bullet \delta$ segue che $\tau = l \sigma \bullet \delta$, cioè $[\tau] dec [\sigma][\delta]$.

Lemma. $[]$ soddisfa le condizioni di riflessione:

$$[\tau] dec \sigma' \delta' \Rightarrow \exists \sigma, \delta (\tau = \sigma \bullet \delta , [\sigma] = \sigma' , [\delta] = \delta').$$

$$\tau' dec [\sigma] \delta' \Rightarrow \exists \delta, \tau (\tau = \sigma \bullet \delta , [\delta] = \delta' , \tau' = [\tau]).$$

$$\tau' dec \sigma' [\delta] \Rightarrow \exists \sigma, \tau (\tau = \sigma \bullet \delta , [\sigma] = \sigma' , \tau' = [\tau]).$$

Si osservi che le ultime due condizioni sono la stessa perché la tavola di composizione è commutativa. Dimostriamo le prime due.

Da $[\tau] dec \sigma' \delta'$ poichè $[]$ è suriettiva allora $\exists \sigma'', \delta''$ $[\sigma''] = \sigma'$, $[\delta''] = \delta'$, cioè $[\tau] dec [\sigma''] [\delta'']$ e per definizione $\exists \psi, \phi \in Z_2$ tali che $\tau = F\phi(\sigma'') \bullet F\psi(\delta'')$. Allora si ponga $\sigma = F\phi(\sigma'')$, $\delta = F\psi(\delta'')$, pertanto $[\sigma] = \sigma'$ e $[\delta] = \delta'$ e $\tau = \sigma \bullet \delta$.

Analogamente da $\tau' dec [\sigma] \delta'$ segue che $\exists \tau'', \delta''$ $[\delta''] = \delta'$, $[\tau''] = \tau'$, cioè $[\tau''] dec [\sigma] [\delta'']$. Per definizione $\exists \psi, \phi \in Z_2$ tali che $\tau'' = F\phi(\sigma) \bullet F\psi(\delta'')$. Pertanto $F\phi^{-1}(\tau'') = F\phi^{-1}(F\phi(\sigma) \bullet F\psi(\delta'')) = F\phi^{-1}(F\phi(\sigma)) \bullet F\phi^{-1}(F\psi(\delta'')) = (F\phi \bullet F\phi^{-1}(\tau''))$

$1)(\sigma) \bullet (F\psi \bullet F\phi^{-1})(\delta'') = F(\phi \bullet \phi^{-1})(\sigma) \bullet F(\psi \phi^{-1})(\delta'') = \sigma \bullet F(\psi \phi^{-1})(\delta'')$. Si ponga $\tau = F\phi^{-1}(\tau'')$, $\delta = F(\psi \phi^{-1})(\delta'')$, pertanto $[\tau] = [\tau''] = \tau'$ e $[\delta] = [\delta''] = \delta'$ e $\tau = \sigma \bullet \delta$.

Corollario. L'immagine inversa di $[]$ preserva gli operatori modali $\bullet, \setminus, /$.

Lemma. L'immagine inversa di $[]$ preserva le costanti 1 e 0.

Infatti $1 \in []^{-1}(1)$ sse $[1] \in 1$ sse $1 \in \{1\}$ sse $1 \in 1$.

$0 \in []^{-1}(0)$ sse $[0] \in 0$, sse $0 \notin [1] = \{1\}$ sse $0 \in 1' = 0$.

Si osservi che in Z_3 vale la condizione (*) ma non in $\frac{Z_3}{\equiv}$. Infatti da $1 = \alpha \bullet \beta$ segue che $[1] \text{dec} [\alpha][\beta]$ e da $\beta = \alpha \bullet \alpha$ segue che $[\alpha] \text{dec} [\alpha][\alpha]$. Pertanto possiamo dimostrare la proposizione.

Supponiamo che esista uno schema $\psi(p_1, \dots, p_n)$ valido in un universo sse vale (*). Allora esso è valido in Z_3 ma non in $\frac{Z_3}{\equiv}$. Esistono $\sigma \in Z_3$, $p_1, \dots, p_n \in O(\frac{Z_3}{\equiv})$ tali che $[\sigma] \notin \psi(p_1, \dots, p_n)$. Ma l'ultima proposizione equivale a $\sigma \notin [] \bullet \psi(p_1, \dots, p_n)$ e poichè $[] \bullet$ preserva tutti gli operatori $[] \bullet \psi(p_1, \dots, p_n) = \psi([] \bullet p_1, \dots, [] \bullet p_n)$. Pertanto esistono $\sigma \in Z_3$, $p'_1, \dots, p'_n \in O(Z_3)$ tali che $\sigma \notin \psi(p'_1, \dots, p'_n)$, cioè ψ non è valido in Z_3 : assurdo.

Proposizione 8. Non è possibile definire attraverso schemi in una teoria lineare classica distributiva con complemento il fatto che un universo sia una categoria.

Proposizione 9. Non è possibile definire attraverso schemi in una teoria lineare classica distributiva con complemento il fatto che un universo sia una monoide.

La dimostrazione delle proposizioni 8 e 9 è la stessa dimostrazione della proposizione 7.

Conclusioni

Il punto di partenza di questa tesi è stata l'osservazione informale che l'inferenza "lineare" compare in quanto struttura algebrica in alcuni modelli dei sistemi dinamici, ad esempio negli automi accettatori. Sono state dunque esigenze legate alla concreta ricerca sui sistemi fisici reali che ci hanno indotto a indagare la logica lineare; l'ideale punto di arrivo di questa tesi avrebbe voluto essere anche il punto di partenza: avremmo voluto indagare fino in fondo quale ruolo competa alla logica lineare nello studio dei sistemi dinamici. I limiti che ci siamo imposti ci hanno impedito di approfondire anche questi aspetti che tuttavia abbiamo assaporato con piccoli risultati parziali che lasciano presagire risultati più solidi: ad esempio la strumentazione algebrica studiata per gli spazi di relazioni su un insieme può servire per studiare i sistemi dinamici discreti usualmente studiati ricorrendo al concetto di transizione su un insieme di stati; questa osservazione ha posto in evidenza che alcuni sistemi di logica modale — ad esempio la logica dinamica e la logica temporale — possono essere ricostruiti in una logica lineare arricchita con una struttura classica.

E' questo dunque uno dei temi che il presente lavoro lascia aperti. Discuteremo qui di seguito alcuni aspetti di questo lavoro che a nostro avviso lasciano spazio a ulteriori approfondimenti. Riteniamo innanzitutto insoddisfacente la trattazione degli universi per la logica lineare distributiva qui presentata. In particolare dovremo studiare più da vicino gli esempi concreti presentati nel quarto capitolo al fine di trovare una

assiomatizzazione completa che li caratterizzi. Analogamente riteniamo che in questo lavoro la problematica relativa alla definibilità sia stata solo introdotta ma non studiata nelle pieghe più recondite principalmente per due motivi: da una parte non siamo a conoscenza di altri strumenti oltre a quello che si serve dei p-morfismi per ottenere un tale tipo di risultati; per un altro verso invece la ancora scarsa conoscenza degli universi ci ha impedito di capire quali siano le condizioni rilevanti delle quali è opportuno indagare la definibilità.

Una immediata generalizzazione del nostro lavoro concerne i teoremi di rappresentazione presentati in [AD93] e [BG93]. Tali teoremi si sono mostrati a un primo studio sufficientemente interessanti; si tratta allora di approfondire lo studio di tali teoremi indagandone la rilevanza matematica e filosofica e quindi di adattare le metodologie usate in questo lavoro al loro contesto.

Riteniamo infine che l'analisi filosofica della portata rivoluzionaria della teoria delle categorie nella matematica possa essere ancora notevolmente sviluppata. Nell'introduzione abbiamo evidenziato alcuni nodi centrali di tale tematica, ad esempio il fatto che l'insistenza sulla tesi della non arbitrarietà delle strutture matematiche conduce a una forma di realismo che si risolve in un approccio descrittivo alla problematica dei fondamenti della matematica. Abbiamo colto l'occasione per mettere in rilievo una analogia tra le esigenze e metodologie di un certo tipo di ricerca fenomenologica e quelle della teoria delle categorie; tuttavia, pur sottolineando la possibilità di usare le categorie concettuali della fenomenologia nella filosofia della matematica, abbiamo risolto provvisoriamente le problematiche ontologiche in problematiche epistemologiche osservando la necessità dell'esistenza di un adeguato linguaggio universale che faccia da ponte tra le diverse discipline

matematiche. Siamo solo parzialmente soddisfatti da queste soluzioni, in particolare siamo persuasi che ai problemi ontologici si possa rispondere direttamente oppure sia necessario evidenziare la connessione che porta a sciogliere le problematiche ontologiche in problematiche epistemologiche. Riteniamo tuttavia che una adeguata valutazione della rivoluzione categoriale possa essere sviluppata solo in concomitanza con uno studio diretto di tale teoria e del terreno matematico in cui cresce e che allo stesso tempo rende fertile. Nel presente lavoro di tesi è stato fatto solo un primo approccio in questa direzione, ancora inadeguato ma sufficiente a esprimere un primo orientamento verso un tale tipo di analisi filosofica della matematica.

Bibliografia

- [AD93] Allwein Gerard, Dunn J. Michael, *Kripke Models for Linear Logic* ,
The Journal of Symbolic Logic 58-21-1993, pp. 514-545.
- [Ale94] Alexiev Vladimir, *Applications of Linear Logic to Computation: An
Overview* , Bull. of the IGPL, Vol.2 No.1, 1994, pp. 77-104.
- [AV93] Abramsky Samson, Vickers Steven, *Quantales, observational logic
and process semantics*, Math. Struct. in Comp. Science, 3(1993),
pp.161-227.
- [BG93] Brown Carolyn, Gurr Doug, *A representation theorem for quantales* ,
Journal of Pure and Applied Algebra, 85 (1993), 1, pp. 27-42.
- [BN36] Birkhoff G., von Neumann J., *The logic of quantum mechanics* ,
Annals of Mathematics, ser.2, 37(1936), pp.823-843.
- [BN76] Banaschewski Bernhard, Nelson Evelyn, *Tensor Products and
bimorphisms*, Canad. Math. Bull. Vol 19- 4 (1976), pp. 385-403.
- [Boo847] Boole George, *The Mathematical Analysis of Logic*, Mac Millan,
Barclay & MacMillan, Cambridge, George Bell, London, 1847.
- [Cay878] Cayley Arthur, *The Theory of Groups*, Amer. J. Math., 1(1878), 50-
52.
- [Coh63/a] Cohen Paul J., *Independence of the Axiom of Choice*, Standford
University, 1963.
- [Coh63/b] Cohen Paul J., *The Independence of the Continuum Hypothesis*, I,
II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1143-1148; 51(1964), 105-
110.

- [Dev88] Devlin Keith, *Mathematics: The New Golden Age*, Penguin Books, London, 1988.
- [DH81] Davis Philip J. , Hersh Reuben, *The Mathematical Experience* , Birkhäuser, Boston, 1981. [tr.it Silvio Bozzi, *L'esperienza matematica* , Edizioni di Comunità, Milano, 1985.]
- [Dun86] Dunn Michael, *Relevance Logic and Entailment* , in *Handbook of Philosophical Logic*, Vol.III, a cura di D.Gabbay e F.Guenther, D.Reidel Publ. Comp., Dodrecht - Boston - London 1986, pp. 117-224.
- [EK65] Eilenberg Samuel, Kelly G. Max, *Closed Categories* , in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965* , a cura di Eilenberg S., Harrison D.K., MacLane S., Röhrli H., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, pp. 421-562.
- [EML45] Eilenberg Samuel, Mac Lane Saunders, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Am. math. Soc., vol 58 (1945), pp. 231-294.
- [Fre884] Frege Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Wilhelm Koehner, Breslau, 1884.
- [Gen34] Gentzen Gerhard, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift, 39 (1934) , pp. 176-210.
- [GM90] Ghilardi Silvio, Meloni Giancarlo, *Modal logics with n-ary connectives*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 36(1990), pp.193-215.
- [Gir87/a] Girard Jean-Yves, *Linear Logic* , Theoretical Computer Science, 50 (1987), pp. 1-102.
- [Gir87/b] Girard Jean-Yves, *Linear Logic and Parallelism* , in *Mathematical Models for the Semantics of Parallelism* , a cura di Marisa Venturini Zilli, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1987, pp. 166-182.

- [Gir91] Girard Jean-Yves, *La logica lineare* , in *Logica*, Le Scienze, quaderni , a cura di Corrado Mangione, 60, 1991, pp. 82-90.
- [Göd31] Gödel Kurt, *Über formal unentscheidbare Sätze der «Principia Mathematica» und verwandter Systeme I* , Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931), pp. 173-98.
- [Göd39] Gödel Kurt, *Consistency-proof for the Generalized Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 25 (1939), pp. 220-224.
- [Gol92] Goldblatt Robert, *Logics of Time and Computation*, CSLI, Leland Stanford Junior University, 1992.
- [Gor92] Gorenstein Daniel, *L'enorme teorema*, in *La matematica della complessità*, Le Scienze, quaderni , a cura di Fabrizio Luccio e Linda Pagli, 67, 1992, pp. 65-77.
- [Hil900] Hilbert David, *Mathematische Probleme*, in *Gesammelte Abhandlungen, Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes*, Springer, Berlin, 1935.
- [How80] Howard W.A., *The Formulae-as-Types-Notion of Construction* , in *To H.B.Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, a cura di J.P.Seldin e J.R. Hindley, Academic Press, 1980, pp. 479-490.
- [Joh82] Johnstone Peter T., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [JT51] Jönsson Bjarni, Tarski Alfred, *Boolean algebras with operators I-II* , American Journal of Mathematics, vol. 73-74 (1951-52), pp. 891-939, pp.127-162.
- [Kli80] Kline Morris, *Mathematics : The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980.

- [Kuh62] Kuhn Thomas S., *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, Chicago, 1962.
- [Lam58] Lambek Joachim, *The mathematics of sentence structure* , Amer. Math. Monthly 65 (1958), pp.154-169.
- [Lam68] Lambek Joachim, *Deductive Systems and Categories I* , Mathematical Systems Theory 2, 1968, pp. 287-318.
- [Law64] Lawvere F.William, *An Elementary Theory of the Category of Sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 52 (1964), pp.1506-11.
- [Law65] Lawvere F.William, *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics* , in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965* , a cura di Eilenberg S., Harrison D.K., MacLane S., Röhrl H., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, pp. 1-20.
- [Law69] Lawvere F.William, *Adjointness in Foundation* , in *Dialectica*, 23, 3/4 (1969), pp. 281-96.
- [Law73] Lawvere F. William, *Metric Spaces, Generalized Logic and Closed Categories* , Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, XLIII, 1973, pp. 135-66.
- [Law75] Lawvere F. William, *Introduction to part I*, in *Model Theory and Topoi*, Springer Lect. Notes in Math., 445 (1975), pp. 3-14.
- [Law80] Lawvere F.William, *Toward the Description in a Smooth Topos of the Dynamically Possible Motions and Deformations of a Continuous Body*, Cahiers Top. Géom. Diff. XXI-4, (1980), pp.377-92.
- [LCRC901] Levi-Civita Tullio, Ricci-Curbastro Gregorio, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applicatios* , Math. Ann. LIV(1901), pp. 125-201.

- [Lol91] Lolli Gabriele, *La logica come fondamento dell'informatica*, in *Logica*, a cura di Corrado Mangione, Le Scienze, quaderni, 60, 1991, pp. 91-95.
- [LS91] Lawvere F.William, Schaunel Stephen H., *Conceptual Mathematics*, Buffalo Workshop Press, Buffalo, NY, 1991.
- [Mel85] Meloni Giancarlo, *Teoria delle categorie, fondamenti della matematica e materialismo dialettico*, in *Scienza e filosofia*, a cura di Corrado Mangione, Garzanti, Milano, 1985.
- [MLa71] Mac Lane Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1971. [Tr. it. di R.Betti, A.Carboni, M.Galuzzi, G.C.Meloni, *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino, 1977.]
- [Mul86] Mulvey, C.J., &, *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser.II 12 (1986)*, pp. 99-104.
- [Pet91] Petitot Jean, *Logica trascendentale, sintetico a priori e ermeneutica matematica dell'oggettività*, in *Conoscenza e Matematica*, a cura di Lorenzo Magnani, Marcos y Marcos, Milano, 1991, pp. 49-85.
- [Pia79] Piana Giovanni, *Elementi di una dottrina dell'esperienza*, il Saggiatore, Milano, 1979.
- [Rob61] Robinson Abraham, *Non-standard analysis*, Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, ser. A, 64, pp. 432-440.
- [Ros90] Rosenthal Kimmo I, *Quantales and their applications*, Longman, Burnt Mill, Harlow, 1990.
- [RW913] Russell Bertrand, Whitehead Alfred North, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1913.
- [Sto36] Stone Marshall H., *The theory of representation for Boolean algebras*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1936), pp.375-481.

- [Whi38] Whitney Hassler, *Tensor product of Abelian Groups* , Duke Mathematical Journal, 4 (1938), pp.499-528.
- [Yet90] Yetter David N., *Quantales and (noncommutative) linear logic* , The Journal of Symbolic Logic 55-1-1990, pp. 41-64.

