Opérations morphologiques sur les partitions (partielles)

Christian Ronse
LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP,
Parc d'Innovation, Boulevard Sébastien Brant,
BP 10413, 67412 ILLKIRCH CEDEX, FRANCE
Mél : cronse@dpt-info.u-strasbg.fr
URL : http://lsiit-miv.u-strasbg.fr/

April 4, 2007

La morphologie mathématique est une approche en traitement d'images basée sur des transformations géométriques des images suivant des propriétés relatives à l'ordre ; les images sont structurées dans un treillis complet.

Exemples usuels (E est un espace de points) :

1. Treillis des images binaires ou figures : $\mathcal{P}(E)$, ordonné par $\subseteq$.

2. Treillis des images à niveaux de gris : T^E, ordonné ponctuellement :

$$\Big(F \leq G\Big) \iff \Big(\forall\, p \in E,\ F(p) \leq G(p)\Big) \quad ,$$

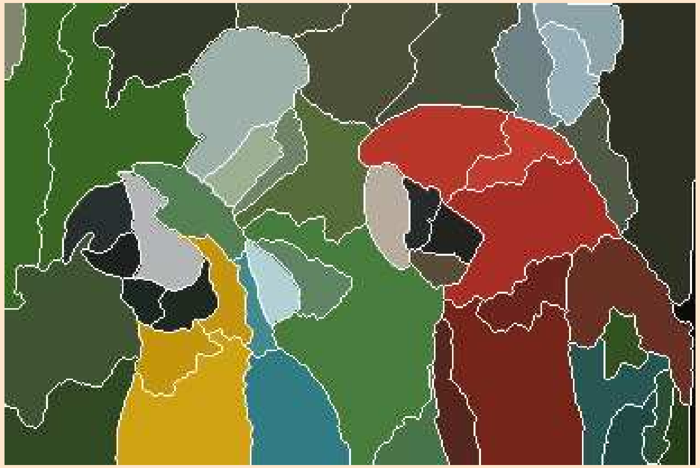
   où T est une partie fermée de $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

3. Treillis des images en couleurs RVB : C^E, ordonné ponctuellement, où $C = T^3$, avec l'ordre marginal (par composantes) sur C :

$$\Big((r, v, b) \leq (r', v', b') \Big) \iff \Big(r \leq r',\ v \leq v',\ b \leq b' \Big) \quad .$$

4. Treillis des partitions de E, ordonné par raffinement : $\pi_f \leq \pi_g$ si toute classe de π_f est incluse dans une classe de π_g ; (on dit alors que π_f est plus fine que π_g, ou que π_g est plus grossière que π_f).

La segmentation associe à une image une décomposition de l'espace en objets d'intérêt, c.-à-d. une partition.

(*Source des images :* Jesús Angulo, Unified morphological color processing framework in a lum/sat/hue representation, in : C. Ronse, L. Najman, E. Decencière (Eds.), *Mathematical Morphology : 40 years on. Proceedings of the 7th International Symposium on Mathematical Morphology*, Paris, France, Vol. 30 of Computational Imaging and Vision, Springer SBM (2005), pp. 387–396.)

Approche traditionnelle : si un algorithme de segmentation ne donne pas un bon résultat sur une image, il faut d'abord faire un pré-traitement sur l'image, afin d'obtenir ensuite une meilleure segmentation.

Approche alternative : si un algorithme de segmentation ne donne pas un bon résultat sur une image, on peut appliquer un post-traitement sur la segmentation.

Il faut donc définir des opérations morphologiques sur les partitions, à partir d'opérations morphologiques sur les ensembles.

Opérations sur les partitions, connues en traitement morphologique des images :

- Suprémum et infimum de partitions.

- Décomposition des classes d'une partition en leurs composantes connexes (suivant une connexité donnée).

- Fusion (ou scission) de certaines classes d'une partition en fonction de critères de "taille" des classes ou d'homogénéité de l'image sur ces classes.

- Serra (2005) : définition d'une érosion sur les partitions à partir d'une érosion sur les ensembles.

Opérations morphologiques de base sur les ensembles

Soit $E = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$. Pour $X \in \mathcal{P}(E)$ et $p \in E$, on pose $X_p = \{x + p \mid x \in X\}$ (translaté de X par p). Pour $X, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la *somme de Minkowski*

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b \mid x \in X, b \in B\} \ ,$$

et la *différence de Minkowski*

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{p \in E \mid B_p \subseteq X\} \ .$$

Étant donné $B \in \mathcal{P}(E)$ (B est appelé un *élément structurant*), on définit les opérateurs $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ suivants :

1. la *dilatation par* B : $\delta_B : X \mapsto X \oplus B$.

2. l'*érosion par* B : $\varepsilon_B : X \mapsto X \ominus B$.

3. l'*ouverture par* B : $\gamma_B : X \mapsto X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$; on a

$$X \circ B = \bigcup \{B_p \mid p \in E,\ B_p \subseteq X\} \quad .$$

4. la *fermeture par* B : $\varphi_B : X \mapsto X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$.

La plupart des autres opérations sont construites à partir de celles-ci, et des notion de connexité et de composante connexe.

Connexité (Serra, 1988)

Une *connexion* sur $\mathcal{P}(E)$ est une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ satisfaisant les 3 conditions suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$.

2. $\forall\, p \in E,\ \{p\} \in \mathcal{C}$.

3. $\forall\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C},\ \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$.

Un élément de $\mathcal{C}$ est appelé *connexe*.

Cela inclut comme cas particuliers la connexité topologique, celle par arcs, et la connexité dans un graphe.

Un *système d'ouvertures de connexion* associe à tout point $p \in E$ une ouverture algébrique γ_p (c.-à-d. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma_p(X) \subseteq X$, $X \subseteq Y \ \Rightarrow \ \gamma_p(X) \subseteq \gamma_p(Y)$ et $\gamma_p(\gamma_p(X)) = \gamma_p(X)$) satisfaisant les 3 conditions suivantes :

4. $\forall p \in E$, $\gamma_p(\{p\}) = \{p\}$.

5. $\forall p, q \in E$, $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma_p(X) \cap \gamma_q(X) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \gamma_p(X) = \gamma_q(X)$.

6. $\forall p \in E$, $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $p \notin X \ \Rightarrow \ \gamma_p(X) = \emptyset$.

Pour $p \in X$, $\gamma_p(X)$ est appelée la *composante connexe de X marquée par p*.

Les deux notions sont équivalentes, il y a une bijection entre les connexions et les systèmes d'ouvertures de connexion :

- $\mathcal{C} \mapsto (\gamma_p,\, p \in E)$:
  $\forall\, p \in E$, $\forall\, X \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma_p(X) = \bigcup\{C \in \mathcal{C} \mid p \in C \subseteq X\}$.

- $(\gamma_p,\, p \in E) \mapsto \mathcal{C}$:
  $\mathcal{C} = \{\gamma_p(X) \mid p \in E,\ X \in \mathcal{P}(E)\}$.

La théorie des connexions a été étendue au cadre des treillis complets quelconques (Serra, 1998 ; Ronse-Serra, 2001).

Glossaire de morphologie mathématique

(et terminologie équivalente en théorie des treillis)

Soient L et M deux treillis complets (égaux ou distincts). Un *opérateur* $\psi : L \rightarrow M$ est :

- croissant (isotone) si $\forall\, x, y \in L$, $x \leq y \;\Rightarrow\; \psi(x) \leq \psi(y)$;
- une dilatation (un sup-homomorphisme complet) si ψ commute avec l'opération de suprémum : $\forall\, X \subseteq L$, $\psi(\bigvee X) = \bigvee_{x \in X} \psi(x)$;
- une érosion (un inf-homomorphisme complet) si ψ commute avec l'opération d'infimum : $\forall\, X \subseteq L$, $\psi(\bigwedge X) = \bigwedge_{x \in X} \psi(x)$.

Un opérateur $\psi : L \to L$ est :

- extensif si $\forall\, x \in L$, $\psi(x) \geq x$;
- anti-extensif si $\forall\, x \in L$, $\psi(x) \leq x$;
- idempotent si $\forall\, x \in L$, $\psi(\psi(x)) = \psi(x)$;
- une fermeture si ψ est croissant, idempotent et extensif ; (opérateur de clôture)
- une ouverture si ψ est croissant, idempotent et anti-extensif. (opérateur de noyau)

Le domaine d'invariance de ψ est l'ensemble $Inv(\psi) = \{x \in L \mid \psi(x) = x\}$. L'application $\psi \mapsto Inv(\psi)$ induit une bijection entre :

- les ouvertures et les familles de Moore duales, (parties de L fermées sous l'opération de suprémum, y compris vide) ;

- les fermetures et les familles de Moore (parties de L fermées sous l'opération d'infimum, y compris vide).

Etant donnés deux opérateurs $\delta : L \to M$ et $\varepsilon : M \to L$, (ε, δ) est une adjonction (résiduation) si

$$\forall x \in L,\ \forall y \in M, \qquad \delta(x) \leq y \iff x \leq \varepsilon(y)\ .$$

Alors δ est l'adjoint inférieur (résidué) de ε, et ε est l'adjoint supérieur (résiduel) de δ.

Dans une adjonction (ε, δ), ε est une érosion et δ est une dilatation ; toute dilatation est l'adjoint inférieur d'une unique érosion, et toute érosion est l'adjoint supérieur d'une unique dilatation.

Par exemple, prenons $L = M = \mathcal{P}(E)$; pour tout élément structurant $B \in \mathcal{P}(E)$, δ_B est une dilatation, ε_B est une érosion, $(\varepsilon_B, \delta_B)$ est une adjonction, γ_B est une ouverture et φ_B est une fermeture. Le domaine d'invariance de γ_B est l'ensemble des $B \oplus X$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.

Treillis complet des partitions

Une partition de E est une famille de parties de E appelées *classes*, non-vides, mutuellement disjointes et recouvrant E.

Soit $\Pi(E)$ l'ensemble des partitions de E, et pour $p \in E$ et $\pi \in \Pi(E)$, soit $cl_\pi(p)$ l'unique classe $C \in \pi$ telle que $p \in C$.

$\Pi(E)$ est ordonné par raffinement :

$$\pi_f \leq \pi_g \iff \left(\forall C \in \pi_f,\ \exists C' \in \pi_g,\ C \subseteq C'\right) .$$

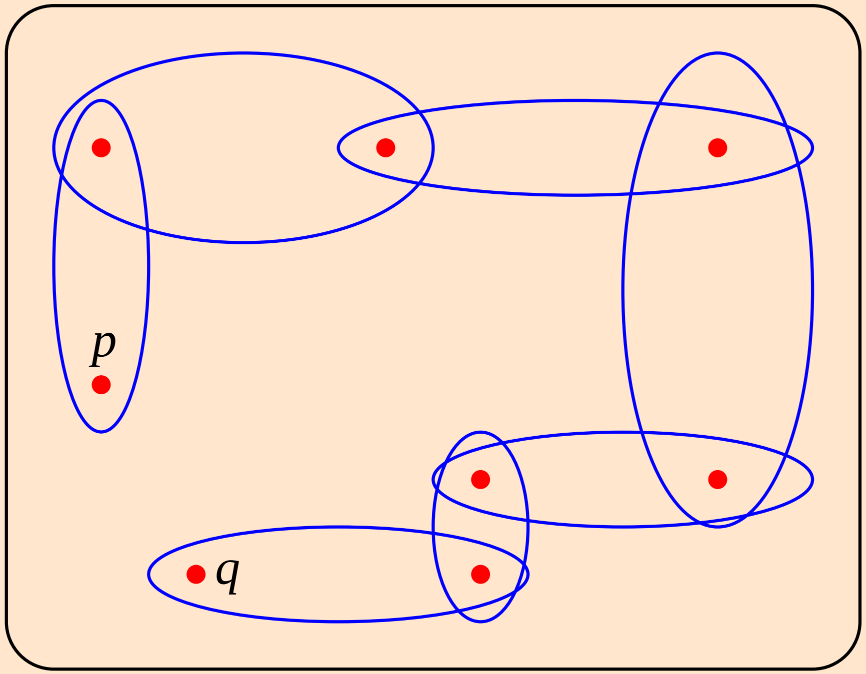
On dit alors que π_f est plus fine que π_g, ou que π_g est plus grossière que π_f.

$\Pi(E)$ est un treillis complet.

Les bornes universelles de $\Pi(E)$ sont la partition universelle $\pi_1 = \{E\}$ et la partition identité $\pi_0 = \{\{p\} \mid p \in E\}$.

Soient $\pi_i \in \Pi(E)$ correspondant aux relations d'équivalence $\mathcal{E}_i$ $(i \in I)$. Alors $\bigwedge_{i\in I} \pi_i$ et $\bigvee_{i\in I} \pi_i$ correspondent respectivement à $\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ et à la clôture transitive de $\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i$.

Pour $p \in E$ on a $cl_{\bigwedge_{i \in I} \pi_i}(p) = \bigcap_{i \in I} cl_{\pi_i}(p)$, tandis que les classes de $\bigvee_{i \in I} \pi_i$ s'obtiennent par *chaînage* de classes de $\bigcup_{i \in I} \pi_i$:



Partitions et connexions

Soit $\mathcal{C}$ une connexion sur $\mathcal{P}(E)$. Alors $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, les composantes connexes de A (selon $\mathcal{C}$) forment une partition de A, qu'on écrira $\pi^{\mathcal{C}}(A)$. Donc $\pi^{\mathcal{C}}(A) = \{\gamma_p(A) \mid p \in A\}$. (NB : pour $A = \emptyset$, $\pi^{\mathcal{C}}(A) = \emptyset$.)

L'ensemble $\mathbf{Conn}(E)$ des connexions sur $\mathcal{P}(E)$ est fermé par intersection, donc c'est un treillis complet, et dans un suprémum de connexions, les composantes connexes sont formées par chaînage (Ronse, 1998).

C'est plus qu'une coïncidence :

Proposition. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, l'application $\mathbf{Conn}(E) \to \Pi(A) : \mathcal{C} \mapsto \pi^{\mathcal{C}}(A)$ est une dilatation.

Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$, soit $\Pi(A,\mathcal{C}) = \Pi(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{C})$ l'ensemble des partitions de A dont les classes appartiennent à $\mathcal{C}$.

Théorème (Serra, 2006, avec Ronse). Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ telle que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{C}$ est une connexion.

2. $\Pi(E,\mathcal{C})$ est fermé sous l'opération de suprémum (y compris le suprémum vide, $\pi_0 \in \Pi(E,\mathcal{C})$).

3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\Pi(A,\mathcal{C})$ est non-vide et a un plus grand élément.

$\Pi(E,\mathcal{C})$ est le domaine d'invariance de l'ouverture $\Gamma^{\mathcal{C}}$ sur $\Pi(E)$, qui scinde chaque classe d'une partition en ses composantes connexes : $\forall\, \pi \in \Pi(E)$, $\Gamma^{\mathcal{C}}(\pi) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} \pi^{\mathcal{C}}(C)$.

Un opérateur de scission de parties de E est une application ψ : $\mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ telle que $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(A) \in \Pi(A)$. L'application $\widehat{\psi} : \Pi(E) \to \Pi(E) : \pi \mapsto \bigcup_{C\in\pi} \psi(C)$ est est appelée opérateur de scission de classes dérivé de ψ.

Proposition. Soit ψ un opérateur de scission de parties de E. Alors $\widehat{\psi}$ est une ouverture sur $\Pi(E)$ si et seulement si il existe une connexion $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}(E)$, telle que $\widehat{\psi} = \Gamma^{\mathcal{C}}$, c.à-d. $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(A) = \pi^{\mathcal{C}}(A)$.

Partitions partielles et connexions partielles

Un algorithme de segmentation d'image est censé partitionner l'espace E en zones "homogènes", les inhomogénéités et discontinuités correspondant alors aux frontières de ces zones.

- Dans certains cas (ligne de partage des eaux), c'est vrai ; mais alors les arêtes et discontinuités ne formant pas de contour fermé disparaissent.

- Dans d'autres (Lipschitz regional, Serra 2006), ce ne l'est pas, on obtient en fait des zones "homogènes" connexes, et un ensemble restant de points "non-homogènes" ; pour avoir une partition, il faudrait confondre les points "non-homogènes" avec les zones "homogènes" réduites à un point.

On pourrait donc considérer qu'il y a des objets "homogènes" mutuellement disjoints, et un "fond" contenant les discontinuités.

Certaines connexions permettent de décomposer une forme en des composantes connexes, les unes larges, les autres des singletons dans les zones étroites et les coins ; on pourrait ignorer les singletons, qui formeraient le "fond", et ne garder que les composantes larges.

Donc on abandonne l'axiome de recouvrement de E pour une partition ou pour les composantes connexes.

Une partition partielle de E est une famille π de parties de E appelées *classes*, non-vides et mutuellement disjointes ; l'union des classes de π est appelée le support de π et notée supp(π).

Une relation d'équivalence partielle sur E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, symétrique et transitive ; son support est l'ensemble supp($\mathcal{R}$) $= \{x \in E \mid \exists y \in E,\ x \mathrel{\mathcal{R}} y\}$. Une relation d'équivalence partielle induit une relation d'équivalence sur son support.

Il y a une bijection entre les partitions partielles et les relations d'équivalence partielle ; à une relation d'équivalence partielle correspond la partition partielle de même support formé des classes d'équivalence sur le support.

Soit $\Pi^*(E)$ l'ensemble des partitions partielles de E ; pour $\pi \in \Pi^*(E)$ et $p \in \text{supp}(\pi)$, soit $cl_\pi(p)$ l'unique classe $C \in \pi$ telle que $p \in C$.

L'ordre par raffinement s'étend à $\Pi^*(E)$; les bornes universelles de $\Pi^*(E)$ sont la partition universelle π_1 et la partition partielle vide $\pi_\emptyset = \{\,\}$.

En fait, $\Pi(E) = \{\pi \in \Pi^*(E) \mid \pi \geq \pi_0\}$.

Les opérations de suprémum et d'infimum sont les mêmes sur $\Pi^*(E)$ que sur $\Pi(E)$ (sauf le suprémum vide, donnant $\pi_\emptyset$ au lieu de π_0).

Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A \neq \emptyset$, soit $\pi_A = \{A\}$ la partition partielle ayant A comme unique classe.

On étend de manière semblable les notions de connexion et de système d'ouvertures de connexion :

Une connexion partielle sur $\mathcal{P}(E)$ est une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ satisfaisant les 2 conditions suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$.

2. $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$.

Par exemple, sont des connexions partielles : une connexion ; le domaine d'invariance $Inv(\gamma)$ d'une ouverture γ sur $\mathcal{P}(E)$.

Un système d'ouvertures de connexion partielle associe à tout point $p \in E$ une ouverture algébrique γ_p satisfaisant les 2 conditions suivantes :

3. $\forall\, p, q \in E$, $\forall\, X \in \mathcal{P}(E)$, $q \in \gamma_p(X) \;\Rightarrow\; \gamma_p(X) = \gamma_q(X)$.

4. $\forall\, p \in E$, $\forall\, X \in \mathcal{P}(E)$, $p \notin X \;\Rightarrow\; \gamma_p(X) = \emptyset$.

Les composantes connexes de X sont les $\gamma_p(X) \neq \emptyset$ (alors $p \in \gamma_p(X)$). Un ensemble non vide peut éventuellement n'avoir aucune composante connexe.

À nouveau, les deux notions sont équivalentes, de la même manière que précédemment.

Les résultats précédents sur les partitions et connexions admettent une version “partielle” :

- Soit $\mathcal{C}$ une connexion partielle sur $\mathcal{P}(E)$. Alors $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $\pi^{\mathcal{C}}(A)$ des composantes connexes de A (selon $\mathcal{C}$) est une partition partielle de A.

- L'ensemble $\mathbf{ConnP}(E)$ des connexions partielles sur $\mathcal{P}(E)$ est fermé par intersection, donc c'est un treillis complet.

- Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, l'application $\mathbf{ConnP}(E) \to \Pi^*(A) : \mathcal{C} \mapsto \pi^{\mathcal{C}}(A)$ est une dilatation.

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$, soit $\Pi^*(A, \mathcal{C}) = \Pi^*(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{C})$ l'ensemble des partitions partielles de A dont les classes appartiennent à $\mathcal{C}$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

  1. $\mathcal{C}$ est une connexion partielle.

  2. $\Pi^*(E, \mathcal{C})$ est fermé sous l'opération de suprémum (y compris le suprémum vide, $\pi_\emptyset \in \Pi^*(E, \mathcal{C})$).

  3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\Pi^*(A, \mathcal{C})$ est non-vide et a un plus grand élément.

- $\Pi^*(E,\mathcal{C})$ est le domaine d'invariance de l'ouverture $\Gamma^{\mathcal{C}}$ sur $\Pi^*(E)$, scindant chaque classe d'une partition partielle en ses composantes connexes : $\forall\, \pi \in \Pi^*(E)$, $\Gamma^{\mathcal{C}}(\pi) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} \pi^{\mathcal{C}}(C)$.

- Un opérateur de scission partielle de parties de E est une application $\psi : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ telle que $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(A) \in \Pi^*(A)$. L'application $\widehat{\psi} : \Pi(E) \to \Pi(E) : \pi \mapsto \bigcup_{C\in\pi} \psi(C)$ est est appelée opérateur de scission partielle de classes dérivé de ψ.

- Soit ψ un opérateur de scission partielle de parties de E. Alors $\widehat{\psi}$ est une ouverture sur $\Pi^*(E)$ si et seulement si il existe une connexion partielle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}(E)$, telle que $\widehat{\psi} = \Gamma^{\mathcal{C}}$, c.à-d. $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(A) = \pi^{\mathcal{C}}(A)$.

Agrégation de classes

Soient δ une dilatation et $\mathcal{C}$ une connexion partielle sur $\mathcal{P}(E)$. Définissons $clstr_\delta^\mathcal{C} : \Pi^*(E) \to \Pi^*(E)$, qui dans une partition partielle fusionne récursivement toutes les classes dont le dilaté (par δ) intersecte une même composante connexe (selon $\mathcal{C}$) du dilaté du support.

En d'autres termes, pour $\pi \in \Pi^*(E)$, on définit un graphe sur π où une arête joint deux classes distinctes C_1, C_2 de π si et seulement si

$$\exists\, p \in E,\ \delta(C_1) \cap \gamma_p(\delta(\mathsf{supp}(\pi))) \neq \emptyset \neq \delta(C_2) \cap \gamma_p(\delta(\mathsf{supp}(\pi))) \quad ,$$

et alors chaque classe de $clstr_\delta^\mathcal{C}(\pi)$ est l'union de toutes les classes de π dans une composante connexe du graphe.

On a aussi

$$clstr_\delta^{\mathcal{C}}(\pi) = \pi \vee \bigvee \{\pi_{C_1 \cup C_2} \mid C_1, C_2 \in \pi,\ \{C_1, C_2\} \in \mathcal{A}\} \ ,$$

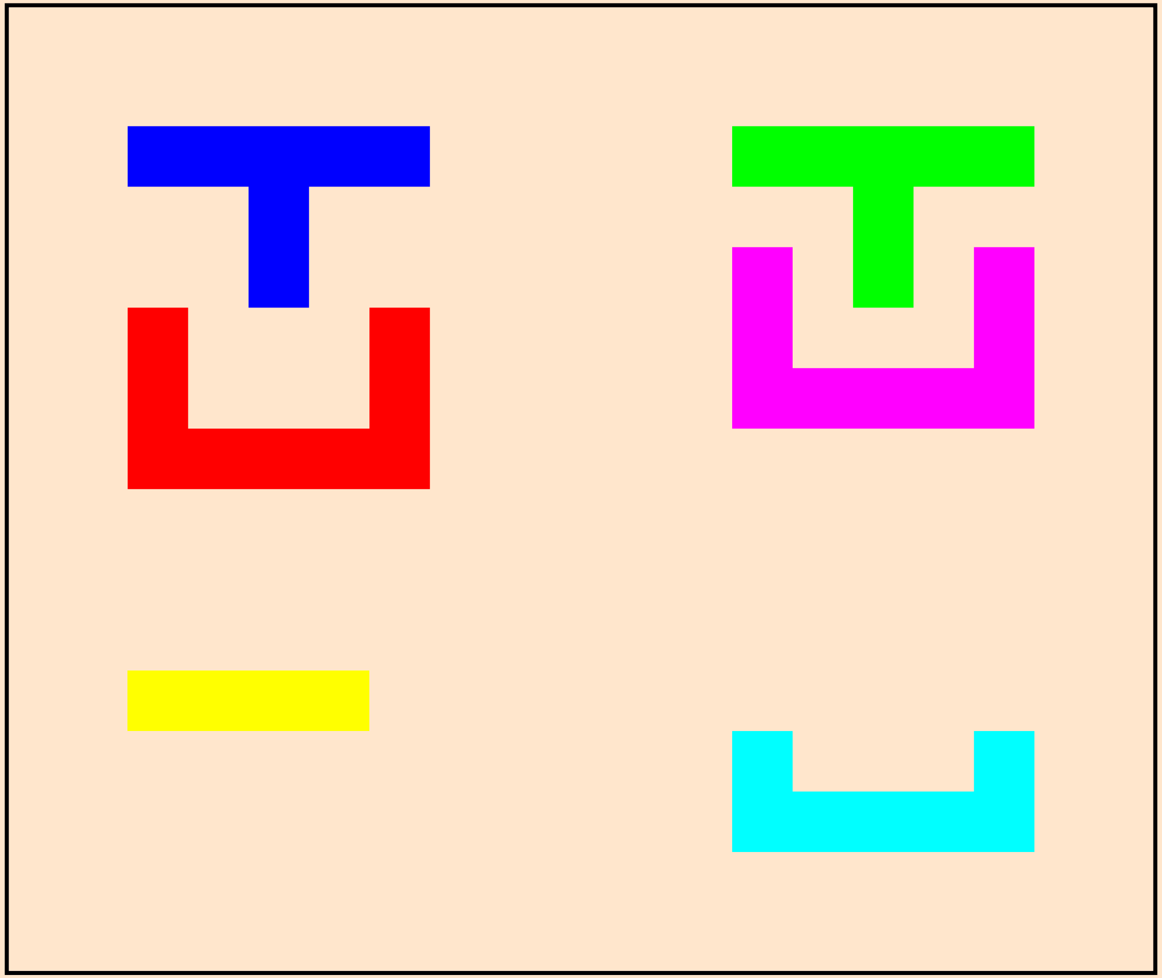
où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des arêtes du graphe.

On appelle $clstr_\delta^{\mathcal{C}}$ l'opérateur d'agrégation basé sur δ et $\mathcal{C}$.

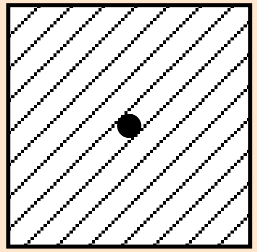
Proposition. Pour toute dilatation δ et connexion partielle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}(E)$, l'opérateur d'agrégation $clstr_\delta^{\mathcal{C}}$ est une fermeture sur $\Pi^*(E)$.

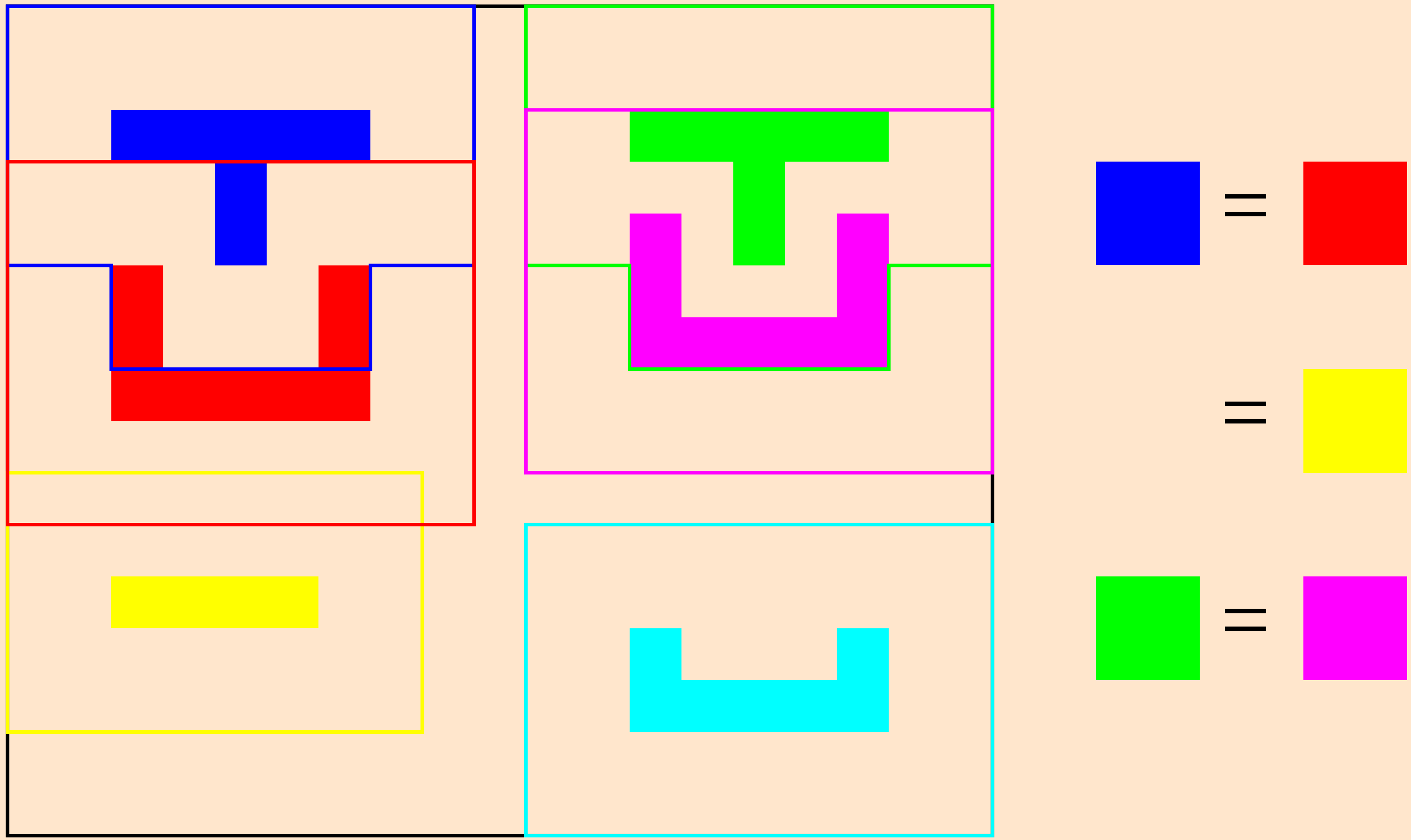
Un cas particulier est celui où on prend pour $\mathcal{C}$ la connexion $\mathcal{C}_0$ formée uniquement de l'ensemble vide et des singletons. Ici il y a une arête entre deux classes distinctes C_1, C_2 si et seulement si $\delta(C_1) \cap \delta(C_2) \neq \emptyset$.

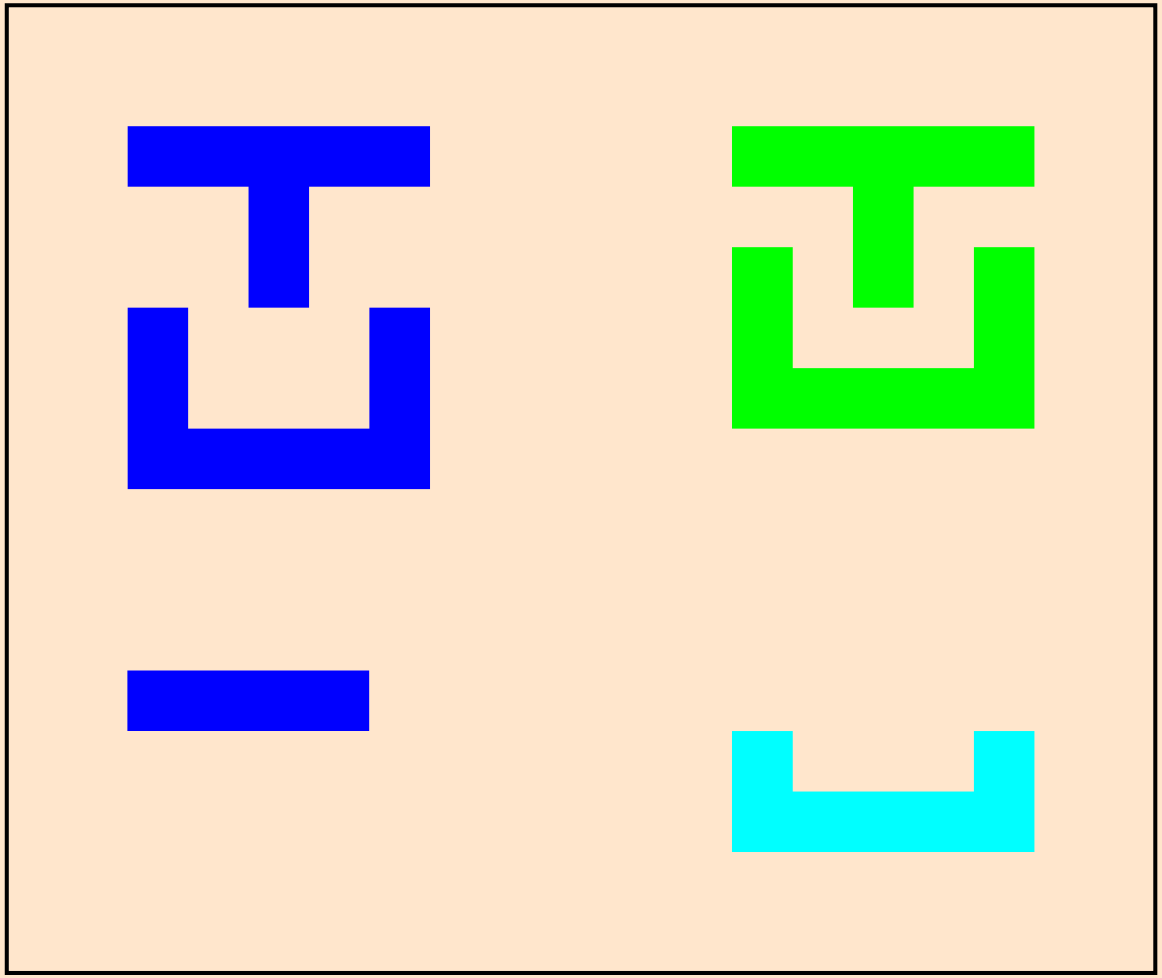
On écrira $clstr_\delta$ pour l'opérateur d'agrégation $clstr_\delta^{\mathcal{C}_0}$.



élément
structurant





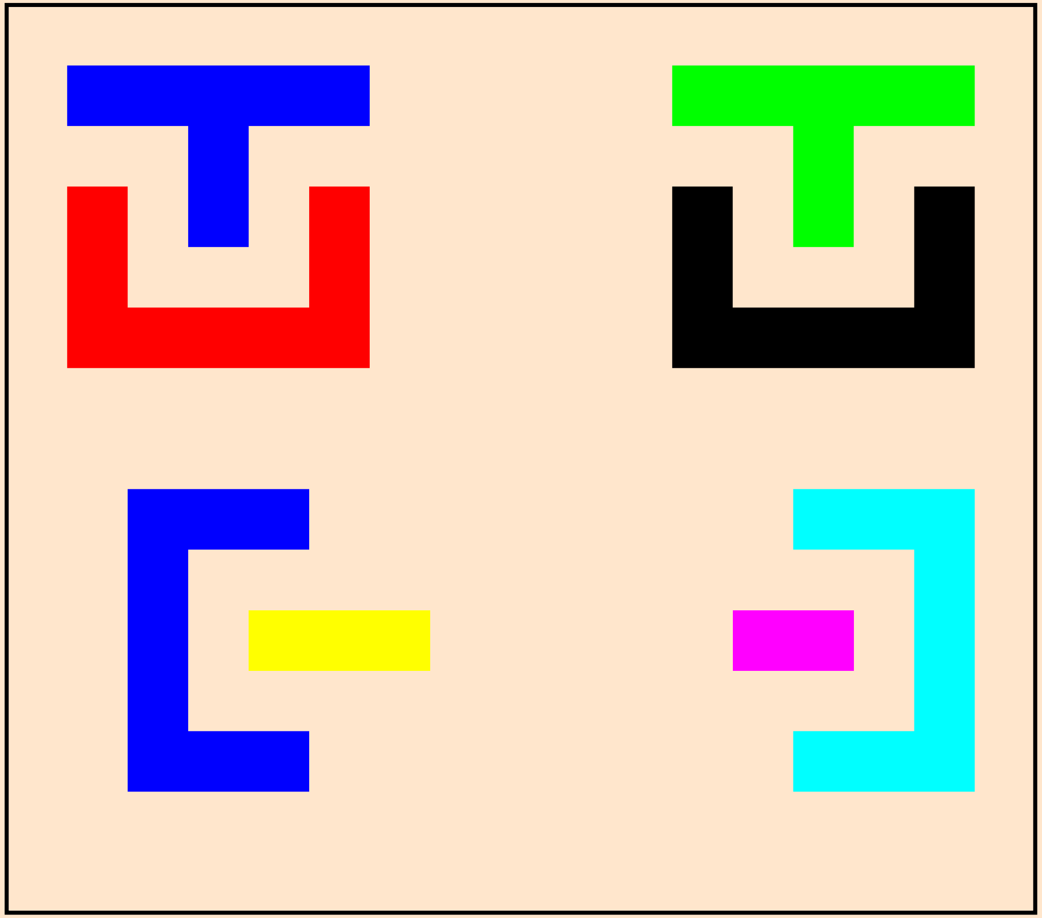


32-b

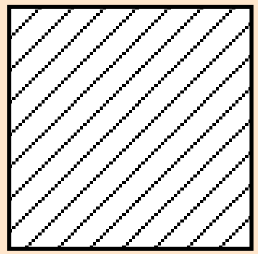
Opérations morphologiques sur les partitions partielles

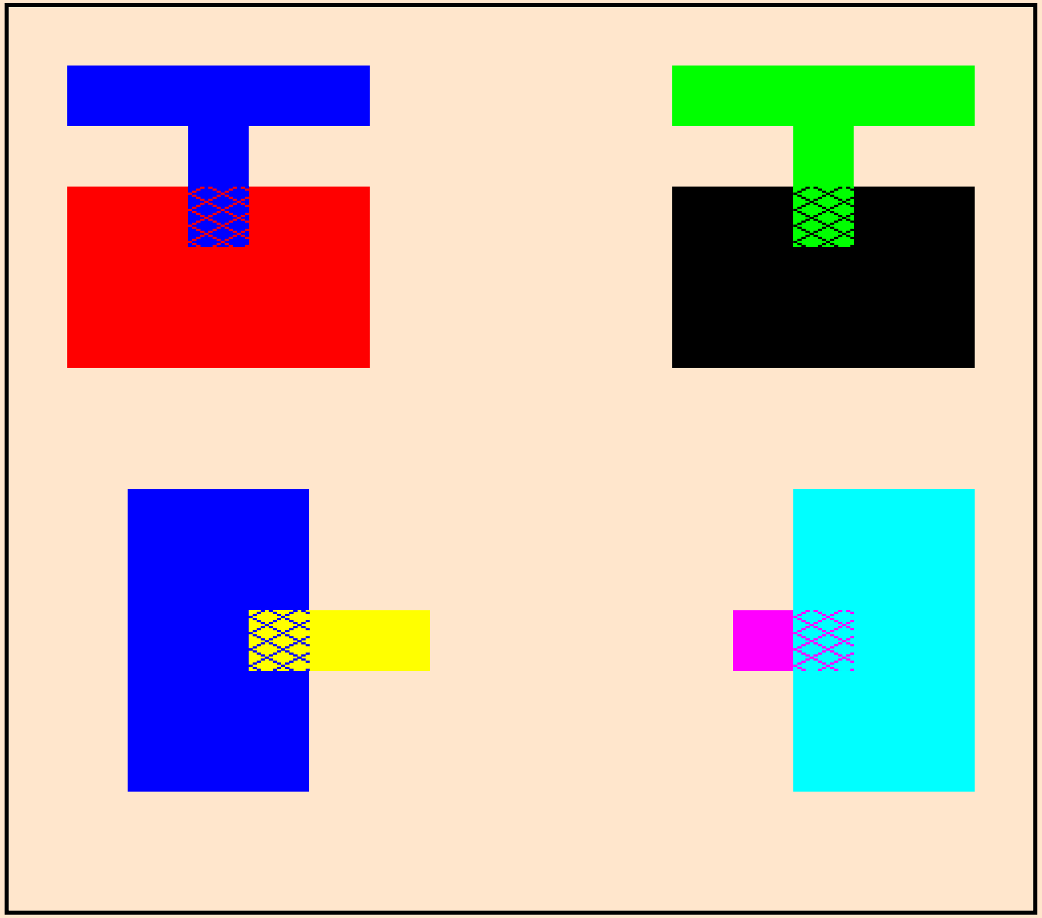
Proposition. Soit φ une fermeture sur $\mathcal{P}(E)$. Alors l'ensemble Π^*_φ des partitions partielles dont les classes appartiennent toutes au domaine d'invariance de φ, est fermé sous l'opération d'infimum. Il existe une fermeture $\overline{\varphi}$ sur $\Pi^*(E)$ dont le domaine d'invariance est Π^*_φ.

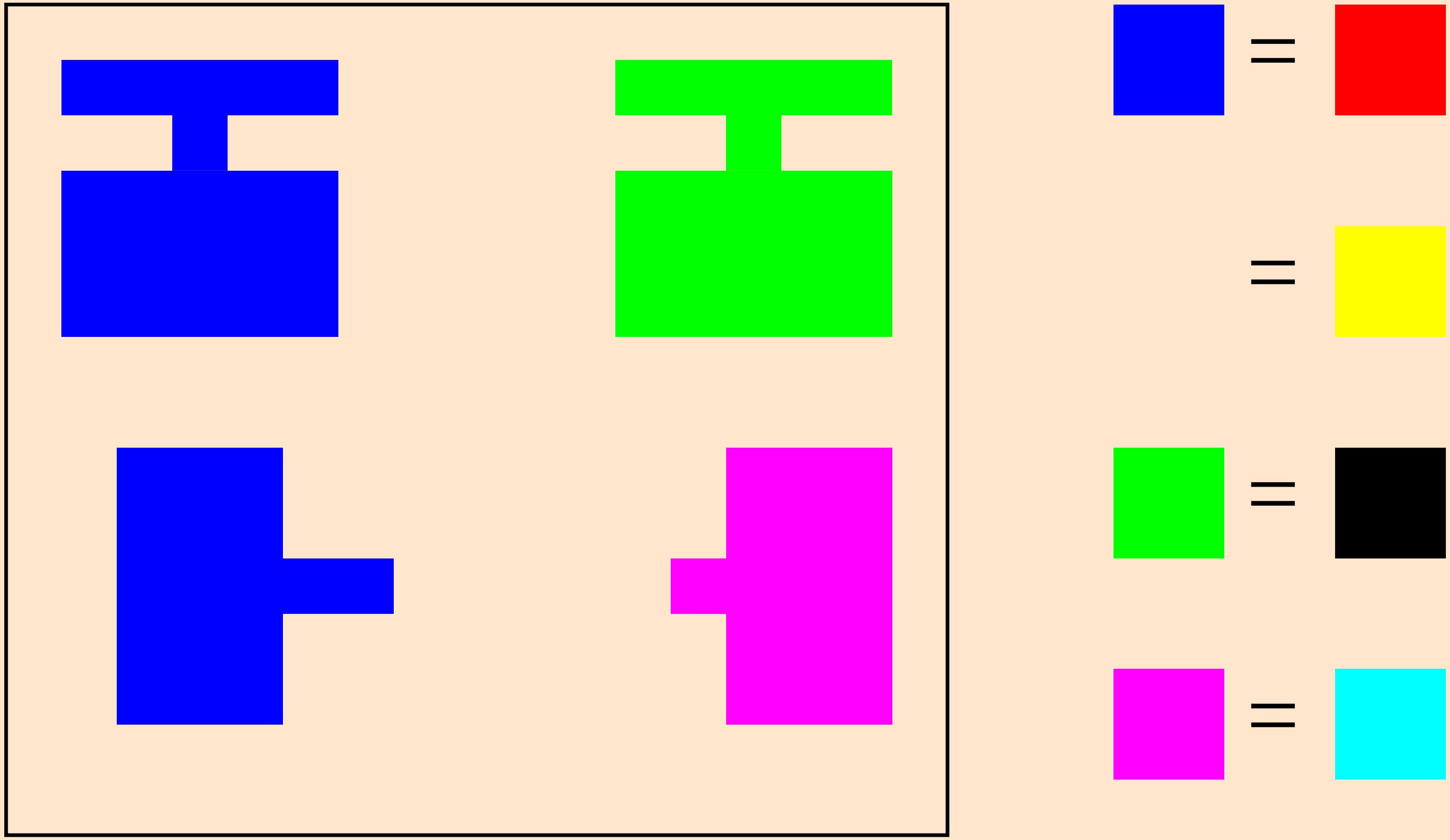
Pour une partition partielle *finie* π, $\overline{\varphi}(\pi)$ est obtenu en répétant jusqu'à stabilité l'opération $\pi \mapsto \bigvee_{C\in\pi} \pi_{\varphi(C)}$ qui applique φ aux classes, et fusionne par chaînage les classes incidentes.

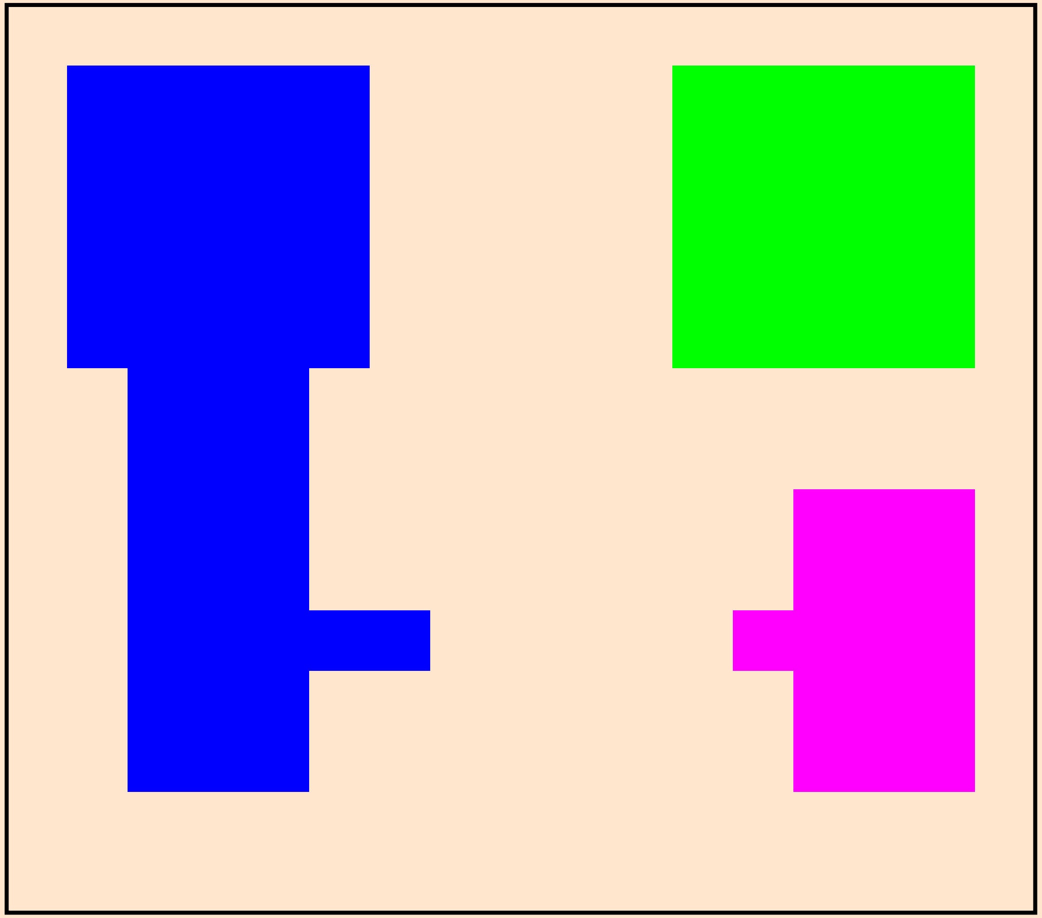


élément
structurant









Proposition. Soit (ε, δ) une adjonction sur $\mathcal{P}(E)$, telle que $\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$ (c.à-d. $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $X \neq \emptyset \Rightarrow \delta(X) \neq \emptyset$). Définissons les opérateurs $\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\delta}$ sur $\Pi^*(E)$ comme suit :

- $\forall \pi \in \Pi^*(E)$, $\widetilde{\varepsilon}(\pi) = \{\varepsilon(C) \mid C \in \pi,\ \varepsilon(C) \neq \emptyset\}$;

- $\forall \pi \in \Pi^*(E)$, $\widetilde{\delta}(\pi) = \bigvee_{C\in\pi} \pi_{\delta(C)}$
(les classes sont dilatées, puis fusionnées par chaînage).

Alors $(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\delta})$ est une adjonction sur $\Pi^*(E)$.

Remarque. Pour $C \in \pi$, $C \neq \emptyset$ donc $\delta(C) \neq \emptyset$, tandis que pour $C_1, C_2 \in \pi$ distincts, $\varepsilon(C_1) \cap \varepsilon(C_2) = \varepsilon(C_1 \cap C_2) = \varepsilon(\emptyset) = \emptyset$, donc ce sont bien des opérateurs $\Pi^*(E) \to \Pi^*(E)$.

Pour une ouverture γ sur $\Pi^*(E)$, $Inv(\gamma)$ est une connexion partielle, et l'opérateur $\Gamma^{Inv(\gamma)} : \Pi^*(E) \to \Pi^*(E)$ de scission de classes en leurs composantes connexes vérifie :

$$\Gamma^{Inv(\gamma)}(\pi) = \{\gamma(C) \mid C \in \pi,\ \gamma(C) \neq \emptyset\} \ .$$

Pour l'adjonction (ε, δ) avec $\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$, on a $\widetilde{\delta}\widetilde{\varepsilon} = \Gamma^{Inv(\delta\varepsilon)}$ et $\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\delta} = \overline{\varepsilon\delta} \cdot clstr_\delta$.

Adjonctions croisées entre partitions et partitions partielles

Deux adjonctions $\Pi(E) \leftrightarrow \Pi^*(E)$ permettront d'étendre à $\Pi(E)$ les dilatations, érosions, adjonctions, ouvertures et fermetures sur $\Pi^*(E)$, et vice-versa. Définissons les 3 opérateurs :

- Inclusion : $IN : \Pi(E) \to \Pi^*(E) : \pi \mapsto \pi$.

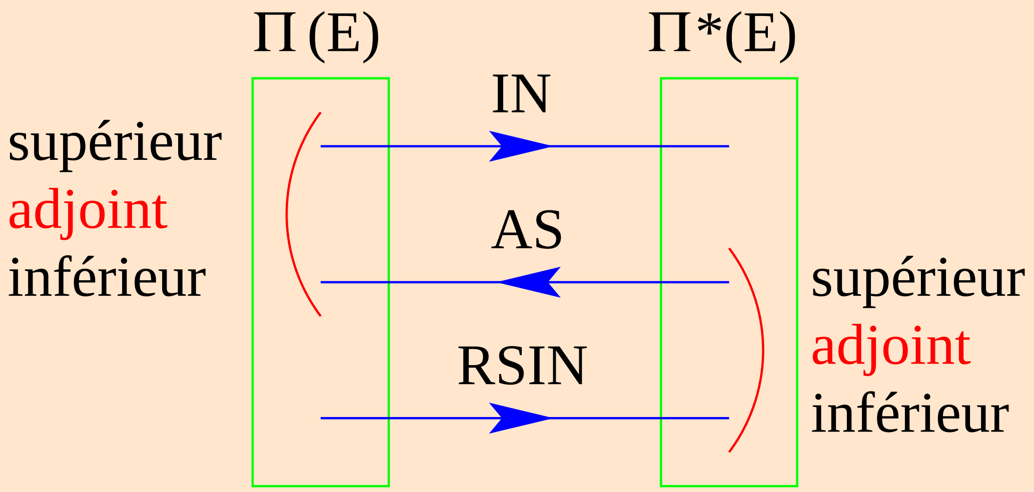
- Ajout de classes singleton en dehors du support :
  $AS : \Pi^*(E) \to \Pi(E) : \pi \mapsto \pi \cup \{\{p\} \mid p \in E \setminus \mathrm{supp}(\pi)\} = \pi \vee \pi_0$.

- Retrait des classes singleton :
  $RS : \Pi^*(E) \to \Pi^*(E) : \pi \mapsto \{C \in \pi \mid |C| > 1\} = \pi \setminus \pi_0$.

Soit $RSIN = RS \cdot IN : \Pi(E) \to \Pi^*(E) : \pi \mapsto RS(IN(\pi)) = \pi \setminus \pi_0$.

- $IN : \Pi(E) \to \Pi^*(E)$ et $AS : \Pi^*(E) \to \Pi(E)$ forment une adjonction (IN, AS).

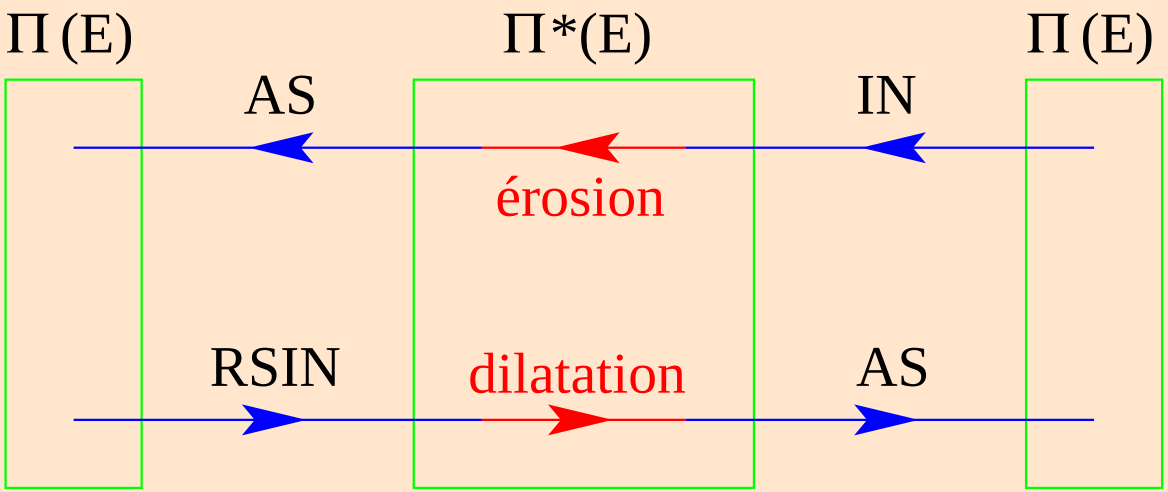
- $AS : \Pi^*(E) \to \Pi(E)$ et $RSIN : \Pi(E) \to \Pi^*(E)$ forment une adjonction $(AS, RSIN)$.



Pour une adjonction (∇, Δ) sur $\Pi^*(E)$, soient

$$\nabla' = AS \cdot \nabla \cdot IN : \pi \mapsto \nabla(\pi) \vee \pi_0 \ ,$$
$$\Delta' = AS \cdot \Delta \cdot RSIN : \pi \mapsto \Delta(\pi \setminus \pi_0) \vee \pi_0 \ .$$

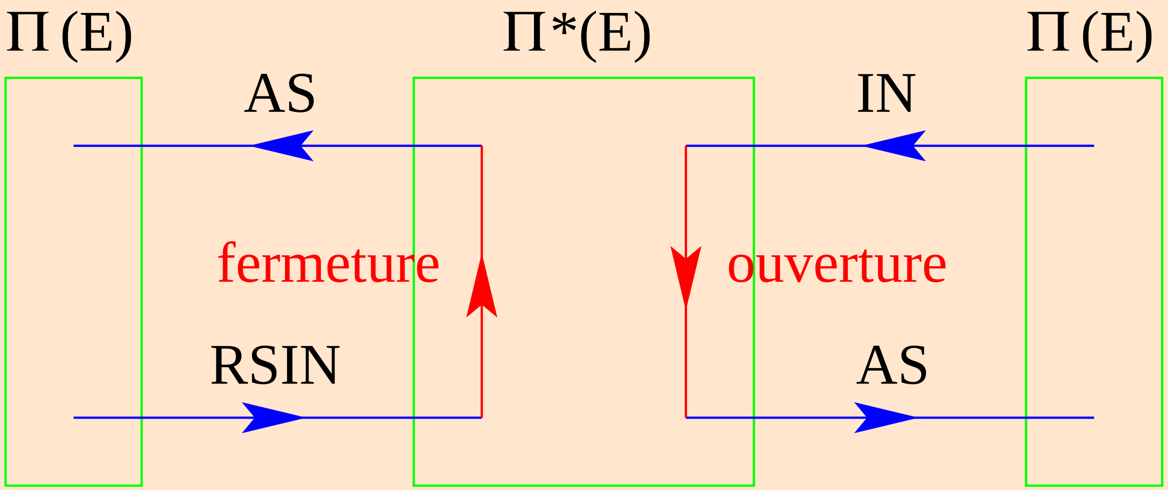
Alors (∇', Δ') est une adjonction sur $\Pi(E)$.



NB : $AS \cdot \widetilde{\varepsilon} \cdot IN$ (pour $\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$) est l'érosion de Serra (2005).

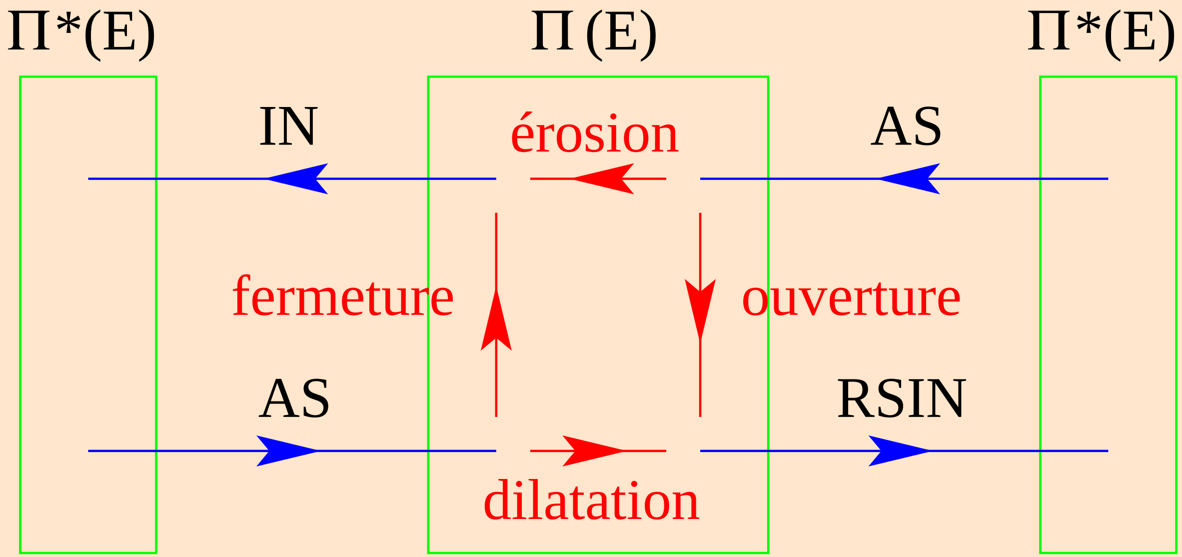
Pour une ouverture Γ sur $\Pi^*(E)$, $AS \cdot \Gamma \cdot IN : \pi \mapsto \Gamma(\pi) \vee \pi_0$ sera une ouverture sur $\Pi(E)$.

Pour une fermeture Φ sur $\Pi^*(E)$, $AS \cdot \Phi \cdot RSIN : \pi \mapsto \Phi(\pi \backslash \pi_0) \vee \pi_0$ sera une fermeture sur $\Pi(E)$.



Par ailleurs, la restriction de Φ à $\Pi(E)$ est une fermeture sur $\Pi(E)$.

On procède de même pour dériver des opérateurs sur $\Pi^*(E)$ à partir d'opérateurs sur $\Pi(E)$.



érosion : $IN \cdot \nabla \cdot AS : \pi \mapsto \nabla(\pi \vee \pi_0)$;
dilatation : $RSIN \cdot \Delta \cdot AS : \pi \mapsto \Delta(\pi \vee \pi_0) \setminus \pi_0$;
ouverture : $RSIN \cdot \Gamma \cdot AS : \pi \mapsto \Gamma(\pi \vee \pi_0) \setminus \pi_0$;
fermeture : $IN \cdot \Phi \cdot AS : \pi \mapsto \Phi(\pi \vee \pi_0)$.

Matroïde ?

Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{S}^n(E) = \{\pi_A \mid A \in \mathcal{P}(E),\ |A| = n\}$.

Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $|A| > 1$, soit $\pi_{0A} = \pi_A \vee \pi_0$ la partition ayant A comme unique classe non-singleton. Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, soit $\mathcal{S}_0^n(E) = \{\pi_{0A} \mid A \in \mathcal{P}(E),\ |A| = n\}$.

On sait que $\Pi(E)$ est un *treillis géométrique*, c.-à-d. : $\Pi(E)$ est un treillis complet semi-modulaire, les éléments de $\mathcal{S}_0^2(E)$ sont des atomes compacts, et tout élément de $\Pi(E)$ est un suprémum d'éléments de $\mathcal{S}_0^2(E)$.

De même, $\Pi^*(E)$ est un treillis complet semi-modulaire, les éléments de $\mathcal{S}^1(E) \cup \mathcal{S}^2(E)$ sont compacts, et tout élément de $\Pi(E)$ est un suprémum d'éléments de $\mathcal{S}^1(E) \cup \mathcal{S}^2(E)$. Les éléments de $\mathcal{S}^1(E)$ sont des atomes, *mais pas ceux de* $\mathcal{S}^2(E)$.

En fait, pour $\pi, \pi' \in \Pi^*(E)$, π couvre π' dans l'un des deux cas suivants :

1. *addition de singleton* : $\mathrm{supp}(\pi') \neq E$ et $\pi = \pi' \cup \{\{p\}\}$ pour un $p \in E \setminus \mathrm{supp}(\pi')$;

2. *fusion de deux classes* : pour deux $C_1, C_2 \in \pi'$ distincts, $\pi = \{C_1 \cup C_2\} \cup \{C \in \pi' \mid C_1 \neq C \neq C_2\}$.

Bien sûr, dans les partitions, seul le cas 2 est possible.