Autour de l'ordre faible de Bruhat

Luigi Santocanale, MOVE

Rencontre TRECOLOCOCO, Angers, 1-2 juillet 2010

Autour de TRECOLOCOCO

- Projet PEPS Intéractions Maths-Informatiques-Ingénierie :

  Intéractions des treillis :
  combinatoire, logique, connaissance, concurrence.

- 4 membres du LIF (Morin, Olive, Brucker, Santocanale).

- Autres sites :
  Caen, Angers, La Rochelle, Lyon, Paris (LSV), Paris (LACL).

Autour de l'ordre faible de Bruhat

L'ordre sur les permutations

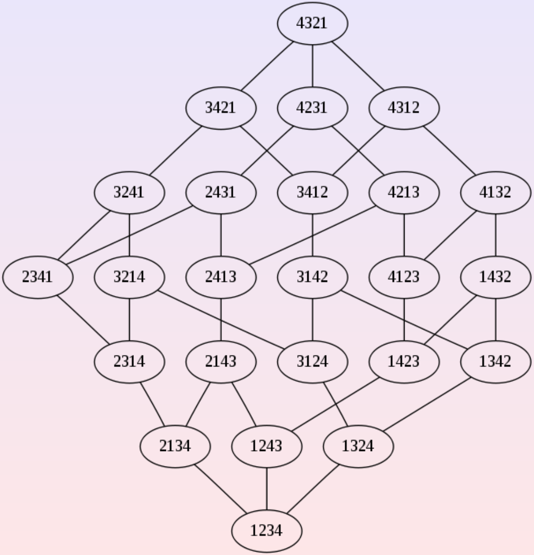
L'ordre sur les mots

Passage au continu : l'ordre sur les chemins

Applications à la géométrie discrète et à la combinatoire des mots

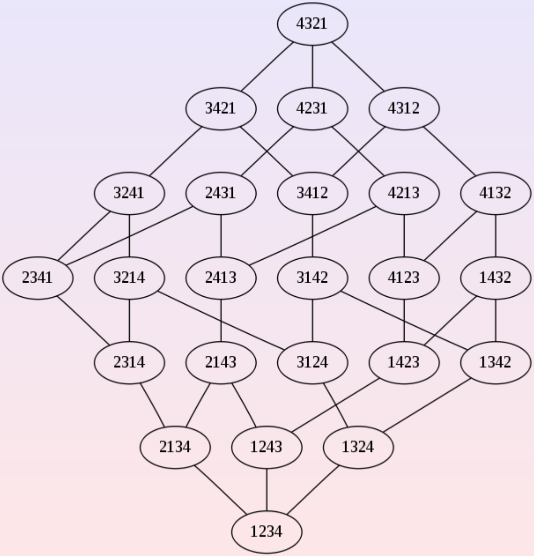
Plan

Le permutohèdre $\mathcal{P}_4$



– c'est très beau ! ! !

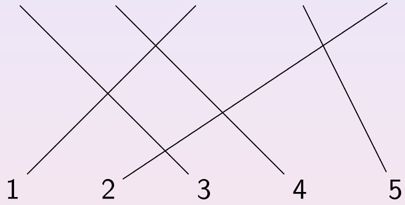
Le permutohèdre $\mathcal{P}_4$



– c'est très beau ! ! !

Les inversions d'une permutation (caractérisation de l'ordre)

Un exemple :



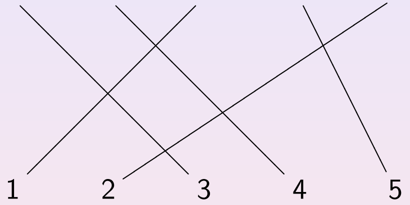
$$Inv(34152) = \{\,(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(2,5)\,\}$$

Propositions :

1. $\sigma \leq \sigma'$ ssi $Inv(\sigma) \subseteq Inv(\sigma')$,
2. pour tout $n \geq 1$, $(\mathcal{P}_n, \leq)$ est un TREILLIS.

Les inversions d'une permutation (caractérisation de l'ordre)

Un exemple :



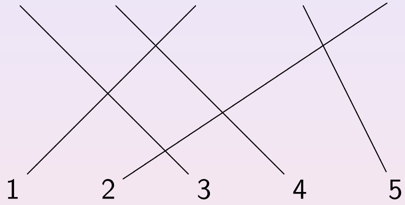
$$Inv(34152) = \{\,(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(2,5)\,\}$$

Propositions :

1. $\sigma \leq \sigma'$ ssi $Inv(\sigma) \subseteq Inv(\sigma')$,
2. pour tout $n \geq 1$, $(\mathcal{P}_n, \leq)$ est un TREILLIS.

Les inversions d'une permutation (caractérisation de l'ordre)

Un exemple :



$$Inv(34152) = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5) \}$$

Propositions :

1. $\sigma \leq \sigma'$ ssi $Inv(\sigma) \subseteq Inv(\sigma')$,
2. pour tout $n \geq 1$, $(\mathcal{P}_n, \leq)$ est un TREILLIS.

Des questions de logique et de combinatoire

TREILLIS : modèle pour la signature

$$\top, \wedge, \bot, \vee$$

plus axiomes equationnels (couples de termes).

L'equation

$$x \wedge (\bigvee_{0 \leq i \leq n} y_i) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} (x \wedge \bigvee_{i \neq j} y_j)$$

(et d'autres) est vraie dans $\mathcal{P}_n$ ...

... car tous les

recouvrements minimaux d'un join-irréductible

ont taille au plus n.

Des questions de logique et de combinatoire

TREILLIS : modèle pour la signature

$$\top, \wedge, \bot, \vee$$

plus axiomes equationnels (couples de termes).

L'equation

$$x \wedge \left(\bigvee_{0 \leq i \leq n} y_i \right) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} \left(x \wedge \bigvee_{i \neq j} y_j \right)$$

(et d'autres) est vraie dans $\mathcal{P}_n$ ...

... car tous les

recouvrements minimaux d'un join-irréductible

ont taille au plus n.

Des questions de logique et de combinatoire

TREILLIS : modèle pour la signature

$$\top, \wedge, \bot, \vee$$

plus axiomes equationnels (couples de termes).

L'equation

$$x \wedge \left(\bigvee_{0 \leq i \leq n} y_i \right) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} \left(x \wedge \bigvee_{i \neq j} y_j \right)$$

(et d'autres) est vraie dans $\mathcal{P}_n$ ...

... car tous les

recouvrements minimaux d'un join-irréductible

ont taille au plus n.

Des questions de logique et de combinatoire

TREILLIS : modèle pour la signature

$$\top, \wedge, \bot, \vee$$

plus axiomes equationnels (couples de termes).

Proposition L'equation

$$x \wedge (\bigvee_{0 \leq i \leq n} y_i) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} (x \wedge \bigvee_{i \neq j} y_j)$$

(et d'autres) est vraie dans $\mathcal{P}_n$ ...

Preuve. Car tous les

recouvrements minimaux d'un join-irréductible

ont taille au plus n. $\square$

La conjecture de Wehrung

Problème : Quels sont les équations vraies dans tous les $\mathcal{P}_n$?

Conjecture : Si une équation est vraie dans tous les $\mathcal{P}_n$,
alors elle est vraie dans tous les treillis.

Plan

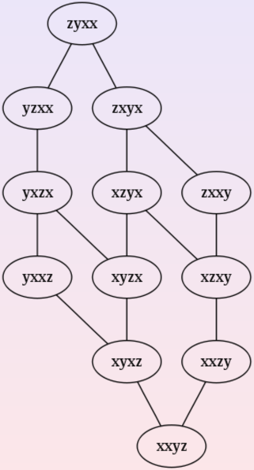
L'ordre sur les permutations

L'ordre sur les mots

Passage au continu : l'ordre sur les chemins

Applications à la géométrie discrète et à la combinatoire des mots

$\mathcal{L}(2, 1, 1)$: c'est aussi beau ! ! !



Le treillis $\mathcal{L}(v)$

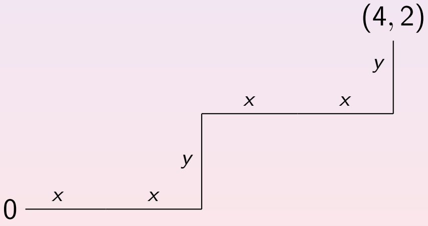
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) &= \{\, w \in \{\, x_1, \ldots, x_n \,\}^* \mid |w|_{x_i} = v_i \,\} \\
&= \ldots \\
&= \text{chemins discrets croissants} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } (0, \ldots, 0) \text{ à } (v_1, \ldots, v_n)\,.
\end{aligned}
$$

Un objectif : comprendre l'ordre par la géométrie.

En dimension 2

$$\mathcal{L}(n, m) = \text{chemins discrets croissants sur le plan de } 0 \text{ à } (n, m)\,.$$

Exemple :



L'ordre est « pointwise » :

ces chemins sont des fonctions croissantes en escalier.

Plan

Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

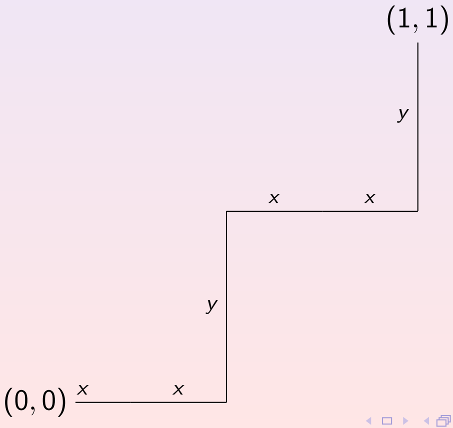
C'est un treillis distributif.

Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

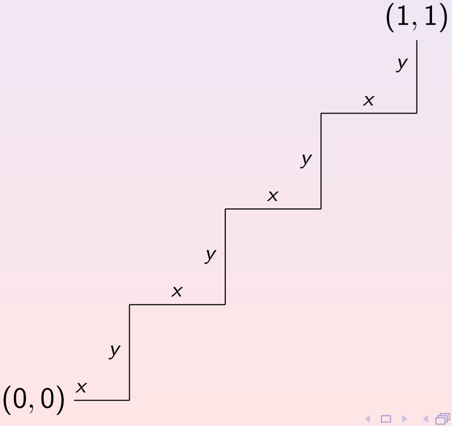


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

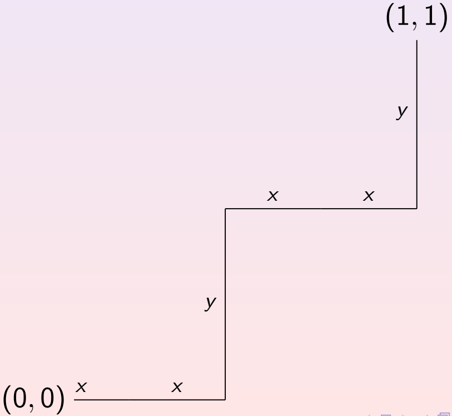


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

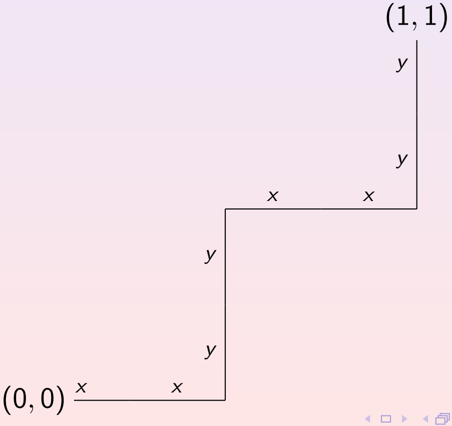


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

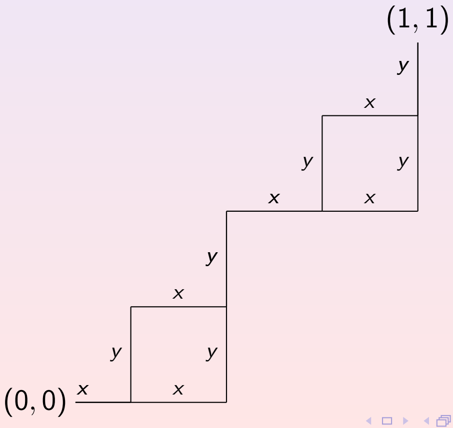


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

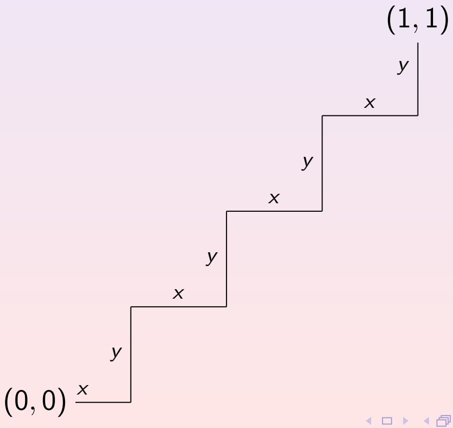


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

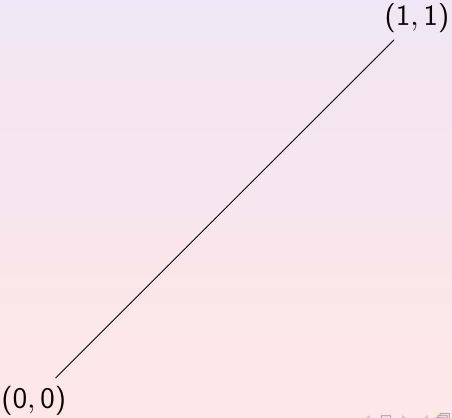


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.

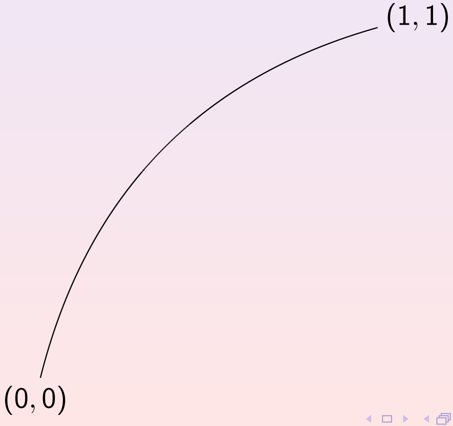


Le treillis $\mathcal{L}(I^2)$

Obtenu en

1. considérant tous les mots sur x, y (co-limite inductive),
2. passant à la limite (complétion de Dedekind-MacNeille).

C'est un treillis distributif.



Et en dimension supérieure ?

Objectif :

Définir un ordre – un treillis $\mathcal{L}(I^n)$ –
sur les chemins continus croissants de 0^n vers 1^n,
pour $n \geq 3$?

Idées :

- $\{ \mathcal{L}(v) \mid v \in \mathbb{N}^n \}$ est un diagramme inductif de treillis, dont on considère
  1. la colimite $\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)$,
  2. la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$.
- Problème majeur et ouvert :
  coder les chemins continus croissants

$$\pi : I \longrightarrow I^n$$

comme éléments de cette complétion.

Et en dimension supérieure ?

Objectif :

Définir un ordre – un treillis $\mathcal{L}(I^n)$ –
sur les chemins continus croissants de 0^n vers 1^n,
pour $n \geq 3$?

Idées :

- $\{\, \mathcal{L}(v) \mid v \in \mathbb{N}^n \,\}$ est un diagramme inductif de treillis, dont on considère
    1. la colimite $\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)$,
    2. la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$.
- Problème majeur et ouvert : coder les chemins continus croissants

$$\pi : I \longrightarrow I^n$$

comme éléments de cette complétion.

Et en dimension supérieure ?

Objectif :

Définir un ordre – un treillis $\mathcal{L}(I^n)$ –
sur les chemins continus croissants de 0^n vers 1^n,
pour $n \geq 3$?

Idées :

- $\{ \mathcal{L}(v) \mid v \in \mathbb{N}^n \}$ est un diagramme inductif de treillis, dont on considère
  1. la colimite $\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)$,
  2. la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$.
- Problème majeur et ouvert :
  coder les chemins continus croissants

$$\pi : I \longrightarrow I^n$$

comme éléments de cette complétion.

Et en dimension supérieure ?

Objectif :

Définir un ordre – un treillis $\mathcal{L}(I^n)$ –

sur les chemins continus croissants de 0^n vers 1^n,

pour $n \geq 3$?

Idées :

- $\{ \mathcal{L}(v) \mid v \in \mathbb{N}^n \}$ est un diagramme inductif de treillis, dont on considère
  1. la colimite $\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)$,
  2. la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$.
- Problème majeur et ouvert :
  coder les chemins continus croissants

$$\pi : I \longrightarrow I^n$$

comme éléments de cette complétion.

Et en dimension supérieure ?

Objectif :

Définir un ordre – un treillis $\mathcal{L}(I^n)$ –
sur les chemins continus croissants de 0^n vers 1^n,
pour $n \geq 3$?

Idées :

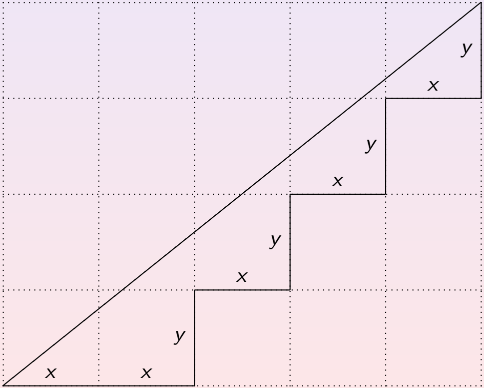
- $\{ \mathcal{L}(v) \mid v \in \mathbb{N}^n \}$ est un diagramme inductif de treillis, dont on considère
  1. la colimite $\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)$,
  2. la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$.
- Problème majeur et ouvert :
  coder les chemins continus croissants
  $$\pi : I \longrightarrow I^n$$
  comme éléments de cette complétion.

Plan

Les mots de Christoffel $\mathcal{C}_{n,m}$

Meilleures approximations inférieures des droites de pente $\frac{m}{n}$
– par rapport à l'ordre faible de Bruhat.

$\mathcal{C}_{5,4} = xxyxyxyxy$:



Mots de Christoffel en dimension supérieure ?

- question ouverte en combinatoire des mots ...
- mots Sturmiennes en dimension supérieure ?

Une généralisation naturelle : pour $v \in \mathbb{N}^n$, on définit

$$\mathcal{C}_v = \bigvee \{ w \in \mathcal{L}(v) \mid i(w) \leq \Delta \}$$

où

- i est le plongement de $\mathcal{L}(v)$ dans $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$,
- Δ code le chemin $t \mapsto (t, \ldots, t)$.

Mots de Christoffel en dimension supérieure ?

- question ouverte en combinatoire des mots ...
- mots Sturmiennes en dimension supérieure ?

Une généralisation naturelle : pour $v \in \mathbb{N}^n$, on définit

$$\mathcal{C}_v = \bigvee \{ w \in \mathcal{L}(v) \mid i(w) \leq \Delta \}$$

où

- i est le plongement de $\mathcal{L}(v)$ dans $\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}^n} \mathcal{L}(v)}$,
- Δ code le chemin $t \mapsto (t, \ldots, t)$.