(Co)dimension et modèle-complétion des variétés d'algèbres (co)Heyting

Luck Darnière   Markus Junker

2 juillet 2009

Tous nos treillis sont distributifs avec extrémités.
$\mathcal{L}_{lat} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee, \wedge\}$.
$\mathcal{L}_{AdB} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee, \wedge, \neg\}$

$\mathcal{L}_{HA} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee, \wedge, \rightarrow\}$
Une algèbre de Heyting est un treillis muni d'une opération supplémentaire $b \rightarrow a = \max\{c \; / \; c \wedge b \leq a\}$.

Exemple

L algèbre de Boole, munie de :

$$b \rightarrow a = \neg b \vee a$$

$\mathcal{L}_{TC} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee, \wedge, -\}$
Un TC-treillis est un treillis muni d'une opération supplémentaire $a - b = \min\{c \mid a \leq b \vee c\}$.

Remarque

L est de Heyting ssi son dual est un TC-treillis.
TC-treillis $=$ algèbre co-Heyting $=$ treillis de Brouwer.

Exemple

$L =$ treillis des fermés de Zariski dans l'espace affine k^n sur un corps k infini.
$A - B$=adhérence de $A \setminus B$ appartient à L.

2 - Modèle-complétion

Une théorie T élimine les quantificateurs (ou quanteurs) dans un langage $\mathcal{L}$ si toute formule de $\mathcal{L}$ est équivalente modulo T a une formule sans quanteur.

Exemple

- Théorie des AdB : pas EQ dans $\mathcal{L}$.
- Théorie des AdB denses : EQ dans $\mathcal{L}$.

NB : Toute AdB se plonge dans une AdB dense.

Une théorie T^* contenant T est une (en fait la seule) modèle-complétion de T ssi tout modèle de T se plonge dans un modèle de T^* et :

1. $T_\forall$ a la propriété d'amalgamation ;
2. T^* élimine les quanteurs.

Exemple

- Théorie des corps algébriquement clos.
- Théorie des ordres linéaires denses.
- Théorie des algèbres de Boole denses.

NB (de mémoire) : La théorie des treillis n'élimine pas les quanteurs *et* n'admet pas de modèle-complétion.

Propriété

T^* est la modèle-complétion de T si tout modèle de T se plonge dans un modèle de T^* et pour tous L_1, L_2, L modèles de T tels que L_1, L_2 finiment engendrés et L est un modèle de T ω-saturé, il existe un plongement de L_2 dans L au-dessus de L_1.

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[rr, hook, dotted] & & L \\
& L_1 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

La théorie des algèbres de Heyting n'élimine pas les quanteurs.

Théorème (L. Maksimova)

Il existe exactement 8 variétés de HA ayant la propriété d'amalgamation.

Remarque

- Ces variétés sont les seules dont les théories $T_1, \ldots, T_8$ peuvent admettre une modèle complétion.
- On peut oublier T_8 (dont le seul modèle est le TC-treillis réduit à un point) et T_7 (théorie des algèbres de Boole) dont la modèle complétion est bien connue.

Théorème (A. Pitts)

Le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre est interprétable dans celui du premier ordre.

Théorème (A. Pitts, S. Ghilardi, M. Zawadowski)

Chacune des théories $T_1, \dots, T_6$ admet une modèle complétion.

Ingrédients de la preuve :

- La propriété d'amalgamation de $T_1, \dots, T_6$.
- Le théorème de Pitts pour T_1 (la théorie des TC-treillis), et une variante de son théorème pour T_2.
- Du « model-theoretic non-sense » pour $T_3, \dots, T_6$, basé sur le fait que ces théories sont localement finies.

Remarque

Aucune axiomatisation intuitive de ces modèle-complétions n'a été donnée à ce jour.

Une partie $\mathfrak{p}$ de L est un filtre premier si :

1. $\emptyset \neq \mathfrak{p} \neq L$.
2. $a \wedge b \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$ et $b \in \mathfrak{p}$.
3. $a \vee b \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

NB : Si a est sup-irreductible alors $\{b \,/\, a \leq b\}$ est un filtre premier. Si L est fini, tous les filtres premiers sont de ce type.

$\mathrm{Spec}\, L$= { filtres premiers de L}.
La topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}\, L$ est engendrée par la famille des $F(a)^c$, où a décrit L :

$$F(a) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, L \ / \ a \in \mathfrak{p}\}$$

Propriété (Dualité de Stone-Priestley)

L est isomorphe au treillis des $F(a)$:

$$F(b) \subseteq F(a) \iff b \leq a$$

En particulier $F(\mathbf{0}) = \emptyset$, et $F(a \vee b) = F(a) \cup F(b)$.

Propriété

$\mathrm{Spec}\, L$ est un espace spectral.

Pour tout filtre premier $\mathfrak{p}$ de L on pose :

- $\mathrm{ht}\ \mathfrak{p} =$ rang de fondation $\mathfrak{p}$
- $\mathrm{coht}\ \mathfrak{p} =$ rang de co-fondation de $\mathfrak{p}$

Pour tout a dans L on pose :

- $\dim a = \sup\{\mathrm{coht}\,\mathfrak{p} \,/\, \mathfrak{p}$ filtre premier, $a \in \mathfrak{p}\}$
- $\mathrm{codim}\ a = \min\{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \,/\, \mathfrak{p}$ filtre premier, $a \in \mathfrak{p}\}$

L est de dimension finie si tous ses éléments sont de dimension finie.

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

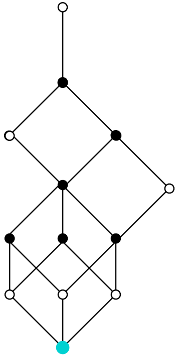


FIG.: $\dim \mathbf{0} = -\infty$

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

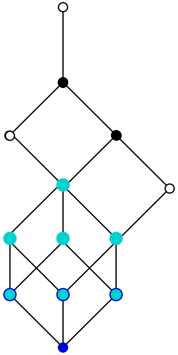


FIG.: Points de dimension 0

Propriété

$$\begin{aligned}
\dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\
\operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b)
\end{aligned}$$

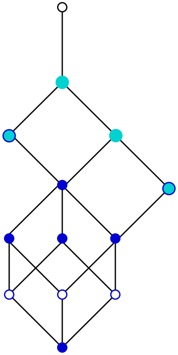


FIG.: Points de dimension 1

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

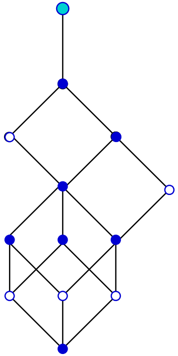


FIG.: Points de dimension 2

Propriété

Dans un treillis quelconque :

$$c = a - b \iff F(c) = \overline{F(a) \setminus F(b)}$$

Propriété

Pour tout $d \in \mathbb{N}$ il existe des formules positives existentielles ϕ_d, ψ_d du langage des TC-treillis, telles que pour tout TC-treillis L et tout $a \in L$:

$$\dim a \geq d \iff L \models \varphi_d(a)$$

$$\operatorname{codim} a \geq d \iff L \models \psi_d(a)$$

Dans tout TC-treillis L posons :

$$\delta_L(a, b) = 2^{-\operatorname{codim}_L(a-b)\vee(b-a)}$$

Propriété (Triangle ultrametric inequality)

$$\delta_L(a, c) \leq \max \delta_L(a, b), \delta_L(b, c)$$

δ_L est une pseudo-métrique, donc définit une topologie sur L.
δ_L est une distance (ultramétrique) ssi sa topologie est séparée.
Nous dirons alors que L est séparé.

Le complété $\widehat{L}$ de L pour δ_L est l'ensemble des classes d'équivalences de suites de Cauchy.

Propriété

Toute application de L^n dans L de la forme $x \mapsto t(x)$, où t est un terme à n variables, est 1-lipschtizienne, donc uniformément continue.

La structure de TC-treillis de L se prolonge de manière unique à $\widehat{L}$ par continuité uniforme, ce qui fait de $\widehat{L}$ une TC treillis.

Lemme

Le prolongement de δ_L à $\widehat{L}$ coïncide avec $\delta_{\widehat{L}}$.

Théorème

Le complété de L est aussi la limite projective de tous les quotients de L de dimension finie.

Remarque

$dL = \{a \,/\, \operatorname{codim} a \geq d\}$ est un idéal de L, pour tout $d \in \mathbb{N}$.
Les quotients L/dL forment un système projectif, et :

$$\widehat{L} \simeq \varprojlim (L/dL)_{d<\omega}$$

corollaire

Toute suite monotone à valeurs dans un compact de $\widehat{L}$ est convergente.

5 - Précompacité

Un TC-treillis L est précompact si son complété est compact.

corollaire

L est précompact ssi L/dL est fini pour tout d.
Dans ce cas, $\widehat{L}$ est aussi la complétion profinie de L.

Remarque

Un TC-treillis profini L est n'est pas forcément compact pour la topologie définie par δ_L, il l'est seulement pour la topologie profinie.

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. **L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. **Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. $L \setminus dL$ **n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. **dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, de même générateur.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. *dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, de même générateur.*
5. **Tout élément a de L est borne inférieure de l'ensemble des inf-irréductibles $x \geq a$.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. *dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, de même générateur.*
5. *Tout élément a de L est borne inférieure de l'ensemble des inf-irréductibles $x \geq a$.*
6. **Tout élément a de L se décompose en composantes sup-irréductibles (en nombre infini).**

Théorème

Pour toute variété $\mathcal{V}$ de TC-treillis, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{V}$ a la propriété du modèle fini.*
2. *Tout TC-treillis libre dans $\mathcal{V}$ est séparé.*
3. *Tout TC-treillis finiment présenté dans $\mathcal{V}$ est séparé et précompact.*

corollaire

Tout TC-treillis finiment engendré est précompact.
Tout TC-treillis de présentation finie est séparé précompact.

Théorème

Il existe un terme $t_{n,d}(x)$ tel que pour tout TC-treillis L engendré par un n-uplet a, l'idéal dL est principal et engendré par $t_{n,d}(a)$.

Question 1

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

A-t-on : $L \leq_\exists \widehat{L}$? $L \preccurlyeq \widehat{L}$?

$\mathcal{F}_n$ = le TC-treillis libre à n générateurs.

Théorème

$\mathcal{F}_n$ possède un unique ensemble de générateur. Il est définissable dans $\mathcal{F}_n$ et dans $\widehat{\mathcal{F}}_n$ par la même formule.

corollaire

Si $\mathcal{F}_n \equiv \widehat{\mathcal{F}}_n$ alors $\mathcal{F}_n \preccurlyeq \widehat{\mathcal{F}}_n$

corollaire

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe $2^{\aleph_0}$ TC-treillis séparés précompacts engendrés par n éléments, qui n'admettent aucune présentation finie.

6- Densité et scission

L'ordre fort $\ll$ est défini sur L par :

$$b \ll a \iff b \leq a \text{ and } a - b = a$$

C'est un ordre strict sur $L \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Exemple

$L =$ TC-treillis des fermés de Zariski de k^n.
$B \ll A$ ssi B est d'intérieur vide dans A.

Propriété

Dans tout TC-treillis L, $\dim a$ est le rang de fondation de a dans $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ pour l'ordre fort $\ll$.

Considérons les deux axiomes suivants.

- Densité (D1)
  Si $c \ll a \neq \mathbf{0}$ alors il existe $b \neq \mathbf{0}$ tel que :
  $$c \ll b \ll a$$
- Scission (S1)
  Si $b_1 \vee b_2 \ll a \neq \mathbf{0}$ alors il existe a_1, a_2 non nuls tels que :
  $$\begin{aligned} a - a_2 &= a_1 \geq b_1 \\ a - a_1 &= a_2 \geq b_2 \\ a_1 \wedge a_2 &= b_1 \wedge b_2 \end{aligned}$$

Remarque

Comme $a_1 \vee a_2 = (a - a_2) \vee a_2 = a$ le second axiome permet de scinder a en deux parties a_1, a_1 le long de b_1, b_2 (d'où son nom).

$L =$ TC-treillis des semi-algébriques réels de $\mathbb{R}^2$.

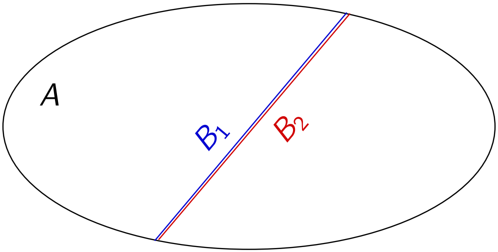


FIG.: Scission d'une ellipse A le long de $B_1 = B_2$

Remarque

Comme $a_1 \vee a_2 = (a - a_2) \vee a_2 = a$ le second axiome permet de scinder a en deux parties a_1, a_1 le long de b_1, b_2 (d'où son nom).

$L =$ TC-treillis des semi-algébriques réels de $\mathbb{R}^2$.

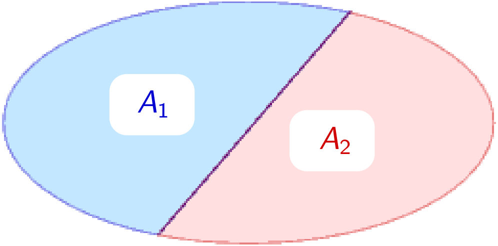


Fig.: Scission d'une ellipse A le long de $B_1 = B_2$

Remarque

Pour pouvoir scinder A le long de B_1, B_2 dans L, il est nécessaire (mais non suffisant) que $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ ne soit pas connexe.

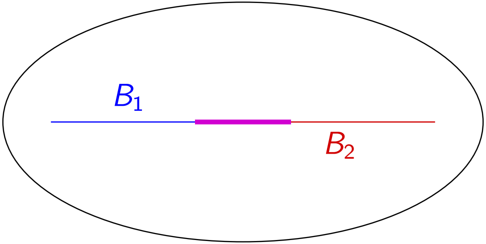
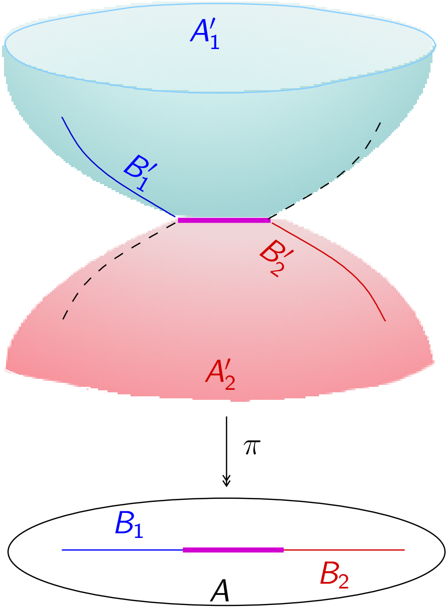


FIG.: Pas de scission possible... dans L


A'_1
B'_1
B'_2
A'_2
π
B_1
B_2
A

L'application $f : A \in L \mapsto \pi^{-1}(A)$ plonge L dans un TC-treillis L' où l'image de A peut se scinder le long des images B_1', B_2' de B_1, B_2 :

$$f(A) = \pi^{-1}(A) = A_1' \cup A_2'$$

Théorème

Tout TC-treillis se plonge dans une extension satisfaisant les axiomes de densité et de scission D1 et S1.

corollaire

Tout TC-treillis existentiellement clos satisfait les axiomes de densité et de scission D1 et S1.

Théorème

Soient L_1, L_2, L des TC-treillis. Si L_2 est fini et si L satisfait les axiomes D1, S1 alors tout plongement de L_1 dans L se prolonge en un plongement de L_2 dans L.

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[rr, hook, dotted] & & L \\ & L_1 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Question 2

Si L_1, L_2 sont finiment engendrés et que L satisfait les axiomes D1, S1, peut-on prolonger tout plongement de L_1 dans L en un plongement de L_2 dans une extension élémentaire de L ?

Pour chaque entier k de 1 à 6, nous introduisons deux axiomes Dk, Sk variantes adaptées à T_k des axiomes de densité et de scission D1, S1 de T_1.

Théorème

Tout modèle existentiellement clos de T_k satisfait les axiomes de densité et de scission Dk, Sk.

Théorème

Soient L_1, L_2, L des modèles de T_k. Si L_2 est fini et si L satisfait les axiomes Dk, Sk alors tout plongement de L_1 dans L se prolonge en un plongement de L_2 dans L.

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[rr, hook, dotted] & & L \\
& L_1 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$