Interactions des Treillis : Combinatoire, Logique, Connaissances, Concurrence

19 janvier 2010

Table des matières

1 Aperçu du projet[1]

Un treillis est un ensemble ordonné caractérisé par le fait que tout sous-ensemble fini d'éléments possède une plus petite borne supérieure (sup) et une plus grande borne inférieure (inf). Un résultat élémentaire de l'algèbre montre que la structure de treillis peut aussi se définir de façon algébrique, par une signature et des équations. Cette structure se situe donc à l'intersection de différentes mathématiques, la combinatoire et l'algèbre d'abord, mais aussi la logique. Sa richesse intrinsèque fait des treillis un objet d'étude pour plusieurs domaines de l'informatique : les bases de données et la représentation des connaissances, la théorie de la concurrence, la vérification des systèmes informatisés et la sémantique des langages de programmation.

Les fondements de la théorie des treillis finis sont constitués autour de deux théorèmes de représentation. D'abord, tout treillis finis est isomorphe à un treillis de Galois. Rappelons cette construction : étant donné une table, c'est-à-dire une relation $T \subseteq O \times A$, les éléments du treillis sont les sous-ensembles de O de la forme ${}^{T}Y$, pour $Y \subseteq A$; ici ${}^{T}Y = \{\, x \in O \mid xTy, \text{ pour tout } y \in Y \,\}$. Le deuxième théorème de représentation s'appuie sur la notion de base canonique directe de règles, connue aussi sous le nom d'OD-graphe. Une base de règles sur un ensemble P est une collection de couples $Y \to y$, où $Y \subseteq P$ et $y \in P$. Un sous-ensemble $X \subseteq P$ est fermé si $Y \subseteq X$ et $Y \to y$ implique $y \in X$. La collection des sous-ensembles fermés est close par l'intersection, ce qui implique que cette collection, ordonnée par l'inclusion, est un treillis. Le théorème de représentation montre que tout treillis fini peut se reconstruire, à isomorphisme près, de cette façon, via la base de règles dite canonique directe.

Bien que ces deux constructions interviennent dans la pratique quotidienne des mathématiques et de l'informatique, le bagage de connaissances que nous avons d'eux est loin d'être satisfaisant. En particulier, un problème fondamental reste ouvert : établir un lien direct entre les deux théorèmes de représentations. On peut se demander, par exemple, s'il est possible de déterminer la base canonique directe d'un treillis à partir de sa table, sans construire le treillis en son entier – en fait, cette construction s'avérerait algorithmiquement très coûteuse.

C'est un problème que nous souhaitons aborder, parmi d'autres, dans le cadre du projet. Le projet nous donnera la possibilité de coordonner nos recherches et de finaliser la collaboration sur des objectifs, choisis parmi une liste de taches que nous avons rédigée, qui seront reconnus comme prioritaires. Le problème mentionné nous semble déjà avoir un statut prioritaire, car il apparaît – explicitement ou implicitement – dans les autres objectifs que nous nous proposons. Ces autres objectifs témoignent d'ailleurs des nombreuses interactions des treillis avec d'autres domaines des mathématiques et de l'informatique.

En *représentation des connaissances* et *fouille de données*, un treillis recueille un état de connaissances et une de ses représentations, par table ou par base de règles, peut se considérer comme une description concise de cet état. En principe nous souhaitons disposer d'une description d'un état à la fois intuitive et adéquate pour répondre de façon efficace à des requêtes. Ces deux contraintes se trouvent souvent en contradiction, mais peuvent être atteintes si on utilise toutes les deux représentations d'un treillis, en sachant passer de l'une à l'autre efficacement.

La question de la traduction entre représentations est aussi soulevée quand on s'intéresse à l'*ordre faible de Bruhat*, qui peut se définir dans tous les *groupes de Coxeter finis*. Cet ordre, étant auto-dual, peut aisément être caractérisé comme un treillis de Galois. La théorie équationnelle de ces treillis, que nous nous proposons de caractériser, peut mieux être étudiée à partir de la représentation par la base canonique directe, qui doit donc être déterminée.

Nous nous proposons aussi d'étudier ces deux constructions et leurs rapports dans les cas des treillis infinis. C'est une tache qui nous projette dans une dimension de la logique, celle des *structures algébriques en logique*, qui est peu représentée en France et que nous souhaitons développer. Nous étudierons les raisons qui limitent à présent la portée de la dualité de Stone-Priestley aux treillis distributifs. Nous souhaitons en fait dépasser ces limites et développer un théorie complète de la dualité pour les treillis. Cette tache s'appuiera sur les compétences diversifiés de notre équipe : les treillis finis, la théorie des treillis (possiblement infinis) et

[1]Deux pages maximum,resumé pour les projets PEPS

l'algèbre universelle, la logique modale et intuitionniste. Un produit dérivé de ce travail sera la proposition de sémantiques pour les logiques sub-structurelles qui puissent revendiquer, par leur utilité et cohérence, le rôle des modèles de Kripke pour des logique classiques. La question autour de la dualité propose une autre fois, dans un cadre élargi, le problème de relier les deux représentations des treillis finis. Il s'agit en fait de mettre en relation deux représentations du même objet mathématique/logique ; l'une qui met l'accent sur la symétrie, comme pour la représentation de Galois ; l'autre qui se voue à casser cette symétrie, comme c'est le cas pour la représentation par la base canonique directe.

Un objectif important du projet est de consolider une communauté française de chercheurs, mathématiciens et/ou informaticiens, qui développent des recherches autour des treillis et des structures algébriques de la logique. Cette communauté a eu une première occasion de se constituer lors du groupe de travail Treillis Marseillais (CIRM, Marseille, avril 2007, rencontre sponsorisé par le projet ANR JC SOAPDC). La communauté, c'est-à-dire les participants au projet, est formée par : Karell Bertet (L3I, La Rochelle), François Brucker (LIF, Marseille), Nathalie Caspard (LACL, Paris), Luck Darnière (U. Angers), Rémi Morin (LIF, Marseille), Frédéric Olive (LIF, Marseille), Maurice Pouzet (U. Claude Bernard, Lyon), Luigi Santocanale (LIF, Marseille), Friedrich Wehrung (LNO, Caen). Nous souhaitons avoir les moyens pour rassembler cette équipe, à plusieurs reprises en 2010, afin de définir des objectifs, aborder ces objectifs en collaboration, consolider les collaborations déjà existantes et en créer des nouvelles, préciser des priorités scientifiques mais aussi celles technologiques. Ce travail aboutira à un programme de recherche plus approfondi et structuré, qui sera l'objet d'une proposition à l'Agence Nationale de la Recherche.

La prise de risque du projet découle de deux difficultés majeures qui s'interposent à sa réalisation, dans le futur proche et dans le futur plus éloigné.

Nous observons d'abord que l'équipe est dispersée sur plusieurs laboratoires et villes. La plus souvent un seul chercheur est présent dans un laboratoire. Nous devons ainsi concevoir, en vue d'une proposition ANR, une structuration de l'équipe qui soit cohérente en ce qui concerne les thématiques abordées et aussi pour la localisation géographique. Cet état de dispersion, auquel nous sommes confrontés, est possiblement la conséquence d'une certaine indifférence portée vers les treillis en France, en mathématiques comme en informatique. Ayant souligné l'intérêt théorique et les retombés pluridisciplinaires des recherches autour des treillis, nous ne pouvons pas justifier cette indifférence. Nous souhaitons alors créer à long terme une communauté forte autour des thématiques proposés. A ce fin, la deuxième difficulté que nous rencontrons - qui est aussi le témoin de la nouveauté de notre proposition - est le manque, à présent en France, d'articulation et d'organisation institutionnelle autour de ces thématiques. Bien que notre équipe soit bien reconnue à l'étranger, ce manque d'articulation est un obstacle sérieux à la valorisation et au développement des recherches en France. À titre d'exemple, un brillant jeune chercheur, qui ait développé une thèse en France sur les treillis, aura toujours - en absence d'une labélisation de son domaine - des difficultés importantes à poursuivre la carrière dans son pays. À tour de rôle, ces circonstances peuvent décourager la demande de thèses dans ce domaine.

2 Contexte scientifique

Avec ce projet, nous souhaitons d'abord animer et propulser la recherche en France autour d'une dimension de la logique qu'on définit d'habitude sous le nom de *logique algébrique*. Rappelons qu'une approche traditionnelle à l'étude de la logique – propositionnelle, classique, modale, intuitionniste, linéaire – consiste à considérer ces logiques comme des systèmes algébriques. Ainsi l'étude des modèles de ces systèmes – les algèbres de Boole avec opérateurs, les algèbres de Heyting, le treillis résidués – s'accompagne et détermine notre compréhension de ce que c'est la logique. Certes, c'est une approche de nature sémantique à la logique, mais qui est capable d'intégrer et donner des réponses à problèmes plus proprement syntaxiques.

Nous n'aimons pas les définitions : en fait, notre conception de ce que c'est la logique algébrique est beaucoup plus compréhensive que la signification habituelle. Sous ce nom, nous incluons, en principe, l'étude de toute structure algébrique qui puisse apporter des solutions aux problèmes de la logique, mais aussi des nouvelles perspectives. Nous mentionnerons alors, parmi ces structures, *les treillis*, car ces structures sont le domaine sémantique minimale de toute logique propositionnelle, et *les catégories*, domaine sémantique traditionnel pour la théorie des preuves. Nous mentionnerons aussi un domaine, *l'algèbre universelle*, qui depuis toujours se peut qualifier comme approche sémantique à la logique équationnelle.

Le théorème de représentation de tout treillis par un treillis de Galois, théorème fondamental de la théorie des treillis, est le point de départ de l'analyse formelle des concepts [GW99] en pleine émergence depuis quelques années en informatique, en particulier dans le domaine de la représentation des connaissances, de la fouille de données, des bases de données et plus récement des ontologies.

En effet, la part grandissante de l'informatique dans la plupart des champs disciplinaires conduit à la production de données en quantité de plus en plus importante, soulevant alors la problématique du stockage et de l'exploitation de ces données. En particulier, l'exploration ou la fouille qui a pour objectif d'extraire des connaissances à partir de grandes quantités de données, par des méthodes automatiques ou semi-automatiques. De plus, bien que la taille du treillis puisse être très importante (exponentielle en fonction des données dans le pire des cas), la récente montée en puissance des ordinateurs rend possible le développement d'un grand nombre d'applications le concernant.

C'est pourquoi il nous semble important d'établir un lien entre recherche fondamentale et appliquée dans le domaine de la théorie des treillis.

Bien que des scientifiques français – nous pensons d'abord à Roland Fraïssé – aient donné une notable contribution à la naissance et au développement du domaine, et que quelques chercheurs de renommée internationale soient localisé en France, ce domaine est actuellement très peu développé en France.

2.1 Treillis, représentation des connaissances, bases de donnés

2.1.1 Treillis classificatoires

Les treillis finis, de par leur correspondance avec un système de classes sont au cœur même des thématiques liées à la représentation des connaissances [GW99] et en particulier de la classification. Les modèles classificatoires que sont les partitions, les hiérarchies ou encore les quasi-hiérarchies sont en effet des treillis particuliers et chaque modèle peut lui-même être vu sous l'angle de son treillis le structurant (comme le treillis des partitions par exemple). Ces treillis, devenus classiques, ont été fort étudiés dans les années 70 pour celui des partitions (par M. Barbut et P. Monjardet entre autres) et dans les années 80 pour celui des hiérarchies (par B. Leclerc et J.-P. Barthélemy par exemples), et dans les années 2000 pour celui des quasi-hiérarchies (par J. Diatta). Une nouvelle approche permet d'englober toutes ces précédentes recherches dans un modèle unique, celui des systèmes binaires [BB08]. L'étude de ces treillis ainsi que du treillis des systèmes binaires a, outre des intérêts théoriques, une potentialité forte en terme d'applications.

3 Programme de recherche détaillé, objectifs

3.1 Treillis finis : classification, combinatoire et logique

Participants : François Brucker, Karell Bertet, Nathalie Caspard, Frédéric Olive, Maurice Pouzet, Luigi Santocanale, Friedrich Wehrung.

Une brève introduction à la theorie des treillis finis. Les fondements de la théorie des treillis finis se constituent autour de deux résultats principaux, deux théorèmes de représentation.

Par un premier théorème de représentation, tout treillis peut se représenter comme un treillis de Galois, obtenu à partir d'une relation T qu'on pense comme une table : les sup-irréductibles apparaissent en colonne, les inf-irréductibles apparaissent en ligne, et on met une croix dans la case (j, m) (c'est à dire, $(j, m) \in T$) si, dans le treillis, le sup-irréductible j est plus petit que l'inf-irréductible m. Une table $T \subseteq O \times A$, où les éléments de O sont pensés comme des objets ayant des attributs de l'ensemble A, donne lieu au treillis de Galois, aussi connu comme treillis de concepts. Les éléments du treillis, les concepts, sont des regroupement maximaux (sous-ensembles) d'objets possédant des attributs en commun [BM70a, DP02].

Le deuxième théorème de représentation se fonde sur la notion de OD-graphe d'un treillis [Nat90], ou encore sur la base canonique directe [Mon90, BM10] : tout treillis peut se représenter comme un treillis des fermés de son OD-graphe. L'OD-graphe et la base canonique directe sont deux représentations distinctes mais équivalentes d'un treillis qui contiennent une information minimale nécessaire à sa reconstruction. Le OD-graphe est un graphe dont les noeuds sont les éléments irréductibles d'un treillis (i.e. éléments qui ne peuvent pas s'obtenir par application d'un opérateur de borne inférieure ou supérieure) et les arcs valués expriment une dépendance entre irréductibles. Cette information de dépendance entre irréductibles est représentée par des règles conjonctives dans la base canonique directe. La reconstruction du treillis à partir de la base canonique directe s'obtient par application du résultat fondamental établissant qu'il existe un isomorphisme entre le treillis et la famille des parties des irréductibles qui vérifient l'ensemble des règles, équipée de la relation d'inclusion. Une telle famille possède la propriété de Moore, à savoir la stabilité par intersection. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un opérateur de fermeture dont les points fixes, appelés fermés, sont les parties de la famille. Stabilité par intersection et/ou opérateur de fermeture, ces deux propriétés impliquent que la famille est un treillis.

3.1.1 Treillis pour la représentation des connaissances

Le premier théorème de représentation est le point de départ de ce qu'on appelle analyse formelle des concepts [GW99]. Il s'agit d'une approche à la modélisation des connaissances qui pose la notion de treillis en premier plan et qui se trouve être en pleine émergence depuis quelques années en informatique. Cette émergence s'explique à la fois par la part grandissante de l'informatique dans la plupart des champs disciplinaires, ce qui conduit à la production de données en quantité de plus en plus importante ; mais également par la récente montée en puissance des ordinateurs qui, bien que la taille du treillis puisse être exponentielle en fonction des données dans le pire des cas, rend possible le développement d'un grand nombre d'applications le concernant. Ainsi, en fouille de données, la problématique de classification est naturellement liée à la notion de concept. Alors que la classification non supervisée consiste à regrouper des objets ayant des attributs proches, tout en séparant ceux ayant des attributs éloignés, la classification supervisée consiste à regrouper objets ayant une même étiquette (appelée "classe") tout en séparant ceux d'étiquettes différentes. La notion de concept - regroupement maximal d'objets possédant des attributs en commun - est par conséquent très proche, et le treillis des concepts est naturellement utilisée dans des applications de classification de données supervisées ou non.

Par contre le deuxième théorème est dans ce cadre au centre des recherches et développements les plus récents. Dans le domaine des bases des donnés relationelles, cette notion de OD-graphe est aussi connue sous le nom de dépendances fonctionnelles minimales, et la question de la minimalité (problème de la clé minimale) se pose, avec des répercussions sur l'optimisation de requêtes. En fouille de données, les dépendances entre attributs sont classiquement représentées par des règles d'association qui peuvent être exactes ou approximatives. L'explosion combinatoire inhérente à la génération de l'ensemble des règles d'association et l'augmentation du volume de données à traiter a rendu incourtounable l'utilisation de représentations concises encore appelées bases. Ainsi, la base générique informative [Ham09] composées de règles dont les prémisses sont appelées générateurs minimaux. Nous avons récement montré [KB10] l'équivalence entre les règles exactes de la base générique informative et la base canonique directe.

Il peut exister plusieurs systèmes de règles conjonctives équivalents, i.e. permettant de construire la même famille de parties. On distinguera la base canonique directe, unique système de règle minimal et direct (i.e. chaque fermé s'obtient directement, par une seule itération sur l'ensemble des règles). Dans de récents travaux [BM10], nous avons montré l'équivalence entre la base canonique directe et cinq autres bases de la littérature, permettant ainsi de regrouper les propriétés de chacun d'entre elles :

– La *base directe-optimale* introduite en 2004 [BN04] est définie par transformation d'un système de règles équivalent. Cette transformation correspond au calcul des clauses résolvantes suivi d'un traitement de non redondance, ce qui permet d'établir que la base ainsi obtenue est à la fois directe et de taille minimale.
– La *base associée à la relation de dépendance*, introduite en 1990 [Mon90], est définie à partir de la relation de dépendance entre irréductibles, ce qui permet de faire le lien avec le OD-Graph.
– La *base canonique et "iteration-free"*, introduite en 1994, se définit à partir de la notion de sous-ensemble libre. Cette définition permet d'établir la propriété de minimalité de la base.
– La *base minimale à gauche*, définie par des règles dont le prémisse est de cardinalité minimale, permet de faire le lien avec les implication propres utilisées en fouille de données [TB02] ou encore les dépendances fonctionnelles minimales utilisée dans le domaine des bases de données relationelles ([Mai83]).
– La *base faible d'implication* introduite en 1995 [RW95] est définie à partir des transversales minimales d'une famille de parties appelées copoint. Cette définition a permit d'établir une connexion avec les espaces de connaissances ([DF99]), famille de parties stable par union et contenant l'ensemble vide.

Objectifs.

1. ***Lien entre la base canonique et la base canonique directe.***

   La base canonique, encore appelée Sterm base, ou base de Duquenne est une référence dans le domaine des treillis aussi bien d'un point de vue fondamental que d'un point de vus appliqué. Il s'agit de la base minimale de règles conjonctives définie en 1986, [GD86], qui n'est pas directe.

   En revanche, la base canonique directe, ou encore le OD-graph, issus de travaux récents, sont beaucoup moins connus et exploités. La question se pose du lien entre ces deux bases, et des pistes ont déjà été envisagées. Nous souhaitons poursuivre ces travaux.

2. ***Aspects algorithmiques issus de la théorie des treillis.***

   L'émergence de l'utilisation des treillis depuis quelques années dans différents domaines de l'informatique, notament dans le domaine de la représentation des connaissances, de la fouille de données, des bases de données et plus récement des ontologies, nous amène à identifier l'importance de liens entre les recherche fondamentales et appliquées de la théorie des treillis.

   Pour cela, nous prévoyons tout d'abord d'identifier les outils algorithmiques nécessaires à une utilisation des treillis dans un cadre applicatif. Il s'agira d'exploiter les résultats fondamentaux de la théorie des treillis pour mettre en place un jeu algorithmique efficace et optimal de manipulation des treillis, ainsi qu'une implémentation sous forme d'une bibliothèque.

3. ***Treillis dichotomiques.***

   Nous avons développé la méthode Navigala, méthode de classification d'images détériorées de symboles par navigation dans un treillis de Galois. Les données sont issues d'une étape préalable d'extraction de vecteurs numériques à partir des images de symboles, puis d'une phase de discrétisation des vecteurs en intervalles disjoints. On obtient ainsi une table de données où les intervalles se retrouvent en colonne, les images de symboles en ligne. L'utilisation du treillis associé selon un principe de navigation est similaire à celui de l'arbre de décision. La multiplicité des chemins possibles pour atteindre un même concept terminal rend le treillis intrinsèquement adapté à l'analyse de données bruitées. Cette méthode utilise des treillis particuliers que nous avons nommés treillis dichotomiques qui se distinguent à la fois par une caractérisation des noeuds représentant les classes des données (ce sont les co-atomes du treillis) ainsi que par une propriété de complémentarité sur les noeuds du treillis.

Le pré-traitement de discrétisation des données est naturellement incrémental : à chaque étape de discrétisation un intervalle est coupé en deux intervalles disjoints dans le but de séparer les objets qui les possédent, d'où une nouvelle table, et par conséquent un nouveau treillis. Se pose alors naturellement la question de la caractérisation de la séquence de treillis, où chaque treillis correspond à une étape de discrétisation, avec des retombées sur une construction incrémentale des treillis dichotomiques.

Il s'agira également d'étudier les propriétés de l'OD-graphe des treillis dichotomiques, afin d'en dégager une caractérisation précise. Une des retombées attendues sera notament de spécifier quelles données issues d'un traitement de discrétisation permettent d'engendrer un treillis dichotomique.

4. ***Systèmes binaires et base canonique.***

D'un point de vue classificatoire (structuration de données en classes interprétables), l'utilisation complète d'un treillis ne peut se faire que d'un point du vue local (l'interaction d'une classe particulière avec ses prédécesseurs ou ses successeurs). Cette approche, très utilisée en représentation des connaissances par exemple, est inopérante lorsque la structure globale de la classification est nécessaire pour l'interprétation. En effet, le nombre de classes (éléments du treillis) est possiblement exponentiel par rapport aux données (les atomes dudit treillis). On peut cependant monter que dans de nombreux cas pratiques (données décrites par une distance ou par un graphe par exemple), le treillis global peut être restreint à un sous-ensemble de celui-ci (sa partie binaire) [BB07, Bru08] sans perte d'information. Ces treillis particuliers ont la particularité d'être générés par les bornes supérieures de paires d'éléments, rendant ainsi possible une étude globale sans aucune approximation. Il n'existe cependant à notre connaissance aucune caractérisation structurelle de ceux-ci, et les bases canoniques semblent être un bon outil pour résoudre ce problème.

Les systèmes binaires peuvent être vues comme les treillis associés aux données décrites par une distance ou un graphe. Ils constituent une classe de treillis englobant la plupart (sinon la totalité) des systèmes de classification utilisés de façon pratique. L'étude de leurs propriétés permet ainsi d'inférer des résultats sur une large gamme de modèles et de problématiques à visées classificatoire.

Leur caractérisation par des bases canoniques permettrait ainsi, outre le résultat théorique, de se munir d'un moyen général d'interprétation des classes de (presque) tous les systèmes de classification.

Pour mener ce travail à bien, nous nous proposons de commencer par une caractérisation d'un système plus restreint, les treillis démantelables [Riv74]. Ces treillis ont la particularité d'être en bijection avec les graphes fortement cordés et les hyperarbres (vue comme un système de classes, chaque élément d'un treillis est une partie connexe d'un arbre donné) stable par restriction [BG09b, BG09a]. Ils correspondent donc à des structures connues et sont de plus des systèmes binaires. Leur proximité avec les arbres devraient permettre d'adapter les résultats obtenus sur les treillis de Tamari.

Cette caractérisation doit permettre de préparer la caractérisation plus globale des systèmes binaires grâce à la base canonique.

Les bénéfices attendus en termes pratique sont d'au moins trois types. Le premier, déjà cité, est de munir les système de classification d'une interprétation aisée de ses classes ; le second, via le OD-graphe, d'offrir une vision globale synthétique d'un système de classes dans son ensemble et enfin, par des restrictions de cette caractérisation, de produire de nouveaux modèles de classification décrits de façon axiomatique.

3.1.2 Combinatoire et logique des treillis

Tout mathématicien expérimenté s'est certainement intéressé dans son parcours scientifique à l'ordre faible de Bruhat sur les permutations. C'est ainsi que plusieurs parmi nous ont développé un intérêt particulier pour ces objets combinatoires et pour cet ordre [Cas00, CBM04, San07b, Weh09, OS09], intérêt qui nous a aussi donné l'occasion de développer une proximité scientifique. Notre commune approche à l'étude des permutations parte du constat que l'ordre de Bruhat est un treillis, et fait donc apparaître en premier plan le point de vue propre de la théorie des treillis et ses outils spécifiques. Parmi ces outils, nous mentionnerons encore la base canonique directe d'un système de fermeture et l'OD-graphe d'un treillis, autour desquels plusieurs de nous ont développé des recherches [MC97, GW03, BM10, San09a].

La recherche que nous avons développé autour des permutations s'étend et se généralise à d'autres collections d'objets étudiés en combinatoire qui possèdent la structure de treillis. Nous mentionnons d'abord les collections d'arbres binaires ayant un nombre fixé de feuilles, connues comme treillis de Tamari [HT72, CB04]. Nos recherches se situent aussi proche de la théorie des groupes de Coxeter finis [BB05, CBM04], car l'ordre faible de Bruhat se généralise à ces groupes [Bjö84], de même que la construction des treillis des arbres binaires à partir des treillis de permutations [Rea06]. Bien que l'ordre faible de Bruhat soit désormais reconnus comme centrale dans des nombreux domaines de la combinatoire – voir par exemple la combinatoire algébrique, dans l'étude des certaines algèbres, bigèbres et algèbres de Hopf [LR02, AM06] – cet ordre demeure peu étudié du point de vue qui lui est naturel, celui de la théorie des treillis. La théorie des treillis peut alors apporter une perspective alternative et innovatrice à ces domaines de la combinatoire. Cet étude des ordres classiques de la combinatoire à l'aide de la théorie des treillis constitue donc une approche prometteuse qui nécessite d'être parcourue en profondeur. Notre équipe, avec ses compétences en théorie des treillis, souhaite explorer ce chemin.

Objectifs.

1. ***Déterminer la base canonique (ou OD-graphe) des treillis associés aux groupes de Coxeter B_n et D_n.*** Déterminer aussi la base canonique des treillis d'arbres [Rea06] qu'on peut associer à ces groupes.

   Ce travail est d'abord finalisé à explorer la théorie equationnelle des ces treillis. Rappelons que des nombreuses propriétés equationnelles d'un treillis se traduisent naturellement en propriétés de sa base canonique.

   La théorie existante de l'OD-graphe montre que le calcul de l'OD-graphe d'un treillis L est assez aisé si l'on possède un treillis M dont connaît déjà l'OD-graphe, et il existe un épimorphisme de M vers L. C'est par exemple le cas le calcul de l'OD-graphe de treillis des arbres binaires, à partir des OD-graphes des treillis des permutations.

   La situation est différente si L est un sous-treillis de M, et ont connaît déjà l'OD-graphe de M. C'est par exemple le cas des treillis de la forme B_n, qui sont des sous-treillis de treillis de la forme A_{2n}. Il s'agit ici d'un verrou à surmonter : l'étude des treillis B_n peut s'accompagner par une réflexion plus abstraite sur la nature du transport de l'OD-graphe le long des monomorphismes de treillis. Bien que des outils, tels que les distances [Grä03] et les normes [Sem05] valués dans un treillis, soient connues pour approcher des problèmes analogues, nous sommes lointains de disposer d'un cadre théorique satisfaisant.

2. ***Déterminer une axiomatisation complète des treillis de permutations.*** Parmi les treillis mentionnés dans le paragraphe ci-dessus, ceux de la forme A_n sont les treillis de permutations (sur $n+1$ éléments). On peut dire que leur structure combinatoire, en particulier leur OD-graphe, est désormais bien comprise. Cela ne nous satisfait pas, nous voulons aller plus loin, en posant cette question qui est fondamentale pour ceux parmi nous qui possèdent une sensibilité de logicien : existe-t-il un algorithme permettant de distinguer les équations de la théorie des treillis qui sont vraies dans tous les treillis de permutations ? Nous pouvons reformuler cette même question avec un langage plus algébrique : nous nous demandons si la variété engendrée par ce treillis de permutation possède un problème du mot décidable.

Nous croyons que la réponse soit positive, pour une raison simple. Nous ne connaissons à présent aucune équation qui est vraie dans tous les treillis de permutations, ma qui n'est pas vraie dans quelque treillis.

Nous conjecturons par conséquence que cette variété coïncide avec la classe de tous les treillis. Nous explorons actuellement la possibilité que tout treillis borné, au sens de [McK72], se plonge dans au moins un treillis de permutations, ce qui aurait comme conséquence notre conjecture.

Encore une fois, la solubilité de cette conjecture repose sur la maîtrise des structures associés a l'OD-graphe, celles de norme et de distance valués dans un treillis. La solubilité de la conjecture repose aussi sur la possibilité d'établir des correspondances entre propriétés de l'OD-graphe et propriétés équationnelles des treillis, un sujet que nous allons décrire dans la section suivante.

3. ***Reconstruction de la structure de groupe à partir de la structure de treillis..*** Il s'agit d'un objectif, très ambitieux, proposé par Claude Barbut, Henry Crapo[2] et Nathalie Caspard [BCC07], que nous ne pouvons pas ne pas inclure ou ne pas soutenir dans le cadre ce projet.

   Rappelons que la clôture transitive du graphe de Cayley d'un treillis de Coxeter finis est une relation d'ordre avec la propriété de treillis. Il s'agit alors de trouver une liste de conditions qui caractérisent ces treillis, à isomorphisme prés. À une première approximation, c'est un objectif semblable à l'objectif précédent, sauf pour les raison suivantes. La liste de condition ne se situe pas nécessairement dans la logique équationnelle, mais possiblement dans une logique plus forte. La caractérisation que l'on souhaite et plus forte, il s'agit d'une caractérisation à isomorphisme près et non pas une équivalence de Morita, en utilisant le langage de la théorie des catégories.

4. ***D'un treillis de concepts à la base canonique, et retour. Correspondance entre treillis de Galois et OD-graphe.***

   Il s'agit ici d'un problème de nature théorique, mais qui est à notre avis centrale pour la théorie des treillis : nous nous poserons la question de la correspondance entre les deux théorèmes de représentation qui sont le fondement de la théorie des treillis finis. Est il possible de construire l'OD-graphe et la base canonique directe d'un treillis, à partir de sa représentation de Galois, c-à-d. de la table T entre sup-irréductibles et inf-irréductibles ? Cette question admet une réponse triviale, car il suffit de construire le treillis en son entier, et puis faire le calcul de la base canonique. Cette réponse n'est pas d'ailleurs intéressante, au moins d'un point de vue algorithmique, car la construction du treillis est en général exponentielle en espace par rapport aux deux représentations. Nous modifions alors cette question comme suit : *Est il possible de construire l'OD-graphe et la base canonique directe d'un treillis, à partir de sa représentation de Galois, de façon efficace ?*

   Une réponse à cette question demandera un approfondissement important de nos connaissances – à la fois algébriques et combinatoires – sur la nature des treillis finis. Une première enquête parmi les experts de la théorie des treillis nous a révélé que, actuellement, peu des résultats sont connus qui pourraient être d'aide à résoudre de le problème.

   L'importance d'une solution à ce problème peut bien s'exemplifier dans le domaine des représentation de connaissances et de la fouille des donnes. Bien que les ontologies décrites par des tables d'objets et attributs aient une interprétation philosophique assez intuitive, l'exploitation algorithmique d'une telle ontologie n'est pas nécessairement aisée. La représentation de la même ontologie par un système de règle semble être plus adaptée à ce fin, d'où la nécessité de disposer des deux représentations à la fois.

   Ce problème est, à notre avis, au coeur d'un problème fondamentale de la logique, celui de la dualité. Nous exposerons ce sujet ensuite.

[2] Ces deux collègues ayant pris leurs retraites, nous ne les incluons pas formellement dans ce projet.

3.2 De la logique algébrique à la théorie des treillis

Participants : Luck Darnière, Luigi Santocanale, Friedrich Wehrung.

Nous souhaitons d'abord confronter nos compétences respectives dans des domaines qui, étant traditionnellement distingués, possèdent des intersections non vides. Ces domaines incluent la logique[3] modale, la logique intuitionniste, les logiques substructurelles et la théorie des treillis. Cet échange nous permettra d'aboutir à une compréhension plus approfondie des ces domaines et à la capacité de transporter les outils mathématiques d'un domaine à l'autre. Cette capacité assurera des nombreuses nouveautés et surprises.

Une approche traditionnelle[4] dans l'étude de la logique modale et de la logique intuitionniste consiste à considérer ces logiques comme des systèmes algébriques. Ainsi l'étude des modèles de ces systèmes – les algèbres de Boole avec opérateurs, les algèbres de Heyting, le treillis résidués – accompagne et détermine notre compréhension de ce qu'est une logique. Cette approche, de nature sémantique, révèle souvent sa puissance, quand elle permet de donner des réponses uniformes à des problèmes qu'on qualifierait plutôt de nature syntaxique, où une logique est considérée plutôt comme un système formel.

Désormais une théorie assez importante porte sur les modèles algébriques des ces logiques et on peut la considérer comme une part incontournable des mathématiques modernes. Un résultat fondamental de la théorie est le célèbre théorème de Stone [Sto36] : en bref, chaque algèbre de Boole peut se représenter comme l'ensemble des fermés-ouverts d'un espace topologique ; cette représentation s'étend en une dualité de catégories. D'autres logiciens ont ensuite généralisé ce résultat aux algèbres qui nous intéressent : Priestley [Pri70] pour les treillis distributifs, Esakia [Esa74] pour les algèbres de Heyting. Ces théorèmes sont le fondement et le point de départ d'autres résultats importants : il nous permettent d'abord de définir de façon cohérente la notion de modèle de Kripke d'une logique et de considérer des classes restreintes de modèles ; nous pouvons ensuite développer la théorie de la correspondance, entre tautologies d'une logique et formules au premier ordre qui définissent des classes modèles, et considérer la canonicité éventuelle des tautologies. Les résultats obtenus par les modalistes [Sah75, GHV04] peuvent se considérer comme des réponses uniformes aux problèmes de complétude et décidabilité de nombreuses logiques modales.

Paradoxalement, ces théorèmes fondamentaux concernent seulement les treillis distributifs et les modèles algébriques des logiques qui satisfont la loi de distributivité entre conjonction et disjonction. Bien qu'on puisse les considérer comme des modèles naturels du fragment additif de la logique linéaire, les treillis non distributifs ne rentrent pas dans ce cadre théorique. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de notion de modèle de Kripke pour la logique linéaire additive ni de théorème de dualité pour les treillis. Certes, des propositions dans cette direction existent [Geh06], parmi lesquelles certaines [Gol06] nous intéressent de près. Aucune proposition n'est d'ailleurs retenue par la communauté des scientifiques du domaine pour sa valeur et son utilité.

Nous constatons donc que seulement depuis peu plusieurs recherches se développent pour obtenir des résultats de dualité pour les treillis. Ces recherches sont d'ailleurs développées par des logiciens et algébristes qui ne sont pas nécessairement des experts de la théorie des treillis. Nous constatons que logique algébrique et théorie des treillis ont suivis jusqu'à présent deux chemins différents. Nous pouvons dire que ces chemins sont parallèles, à cause des nombreuses similarités que nous pouvons observer.[5] Avec les compétences présentes dans notre équipe, nous croyons pouvoir montrer que la géométrie des ces parallèles est sphérique, non pas euclidienne : nous nous poserons donc à l'intersection des chemins pris respectivement par la logique algébrique et la théorie des treillis.

Nous proposons ensuite des objectifs plus spécifiques.

1. ***Dualité : de la logique modale à la théorie des treillis.*** Nous voulons d'abord généraliser la dualité pour les treillis finis proposée en [San09a] à la classe de tous les treillis, possiblement infinis.

[3] Nous nous restreindrons, au début, à la logique propositionnelle.

[4] Cette approche est sûrement plus populaire à l'étranger qu'en France. Nous voyons ici une raison forte pour proposer ce projet, afin de rattraper le retard que la recherche française possède dans ce domaine.

[5] Par exemple, la méthode des filtrations qu'on utilise en logique modale pour démontrer la propriété du modèle fini et essentiellement le même par lequel on montre que la variété des tous les treillis est engendrée par ses objets finis.

Que cela soit en principe possible, nous est suggéré par ce type de considérations. Nous avons récemment travaillé sur la logique modale monotone $\mathbb{ML}$ [SV09]. Dans ce cadre, l'opérateur de possibilité de la logique modale ne satisfait pas la loi de distributivité par rapport à la disjonction. Dans la logique modale monotone $\mathbb{ML}(\mathbb{S}4)$ l'opérateur de possibilité non-distributif est un opérateur de fermeture. Cette observation donne la possibilité de coder la théorie des treillis dans la logique $\mathbb{ML}(\mathbb{S}4)$ et de se servir, en principe, des connaissances et outils développés dans le cadre de la logique modale. La situation est d'ailleurs analogue au codage de la logique intuitionniste dans la logique modale $\mathbb{S}4$. En particulier, on s'aperçoit aisément que les modèles de Kripke de $\mathbb{ML}(\mathbb{S}4)$ sont exactement les bases directes au sens de [BM10] et les présentations au sens de [San09a].

Nous comptons nous appuyer extensivement sur cette analogie – en utilisant des idées et outils bien connus par les modalistes – pour atteindre notre but de généraliser la dualité à tous les treillis.

2. ***Théorie de la correspondance et canonicité pour les treillis.*** Un constat de [San09a] est que de nombreuses équations entre termes dans la signature des treillis possèdent des correspondants de premier ordre dans les OD-graphes. Cela veut dire que, pour une telle équation, un treillis finis satisfait l'équation si et seulement si son OD-graphe est un modèle de son correspondant, une formule de la logique du premier ordre. Cette situation nous rappelle un chapitre important de la logique modale : plusieurs équations sont vraie dans un algèbre modale si et seulement si leur duale, un modèle de Kripke, est modèle d'une une formule de la logique du premier ordre, appelée le correspondant.

   La question suivante se pose alors naturellement, pour la logique modale comme pour les treillis : quelle est la classe d'équations qui possède un correspondant dans la logique du premier ordre ? C'est une question difficile qu'on peut aborder par des approximations : peut-on repérer des classes d'équations qui admettent des correspondants, éventuellement dans une logique plus complexe de celle du premier ordre, mais qui demeure raisonnable ?

   Dans la logique modale une théorie, déjà assez complète et à la fois en train de se développer, répond à ces questions [Sah75]. Cette théorie s'entrelace avec une autre thématique, la canonicité [GHV04], dont le but est de prouver la complétude de certaines axiomatisations. Une équation est dite canonique si elle se relève à sa complétion de Stone, aujourd'hui connue comme complétion canonique compacte [GH01]. Toute équation qui appartient au fragment dit de Sahlqvist est canonique.

   Le résultats connus [GH01] indiquent que, si on se restreint au langage de la théorie de treillis pure – sans opérateurs supplémentaires – très peu d'équations appartiennent au fragment de Sahlqvist. D'ailleurs, les chercheurs explorent à présent des extensions du fragment de Sahlqvist [CP09, Suz08] qui préservent la canonicité. Ces travaux paraissent beaucoup plus intéressants si on se restreint à la théorie des treillis pure.

   Les questions autour de la canonicité des équations – de la théorie des treillis purs – trouvent une généralisation dans cette question, soulevée par Friedrich Wehrung : *est ce que tout treillis dans une variété donnée se plonge toujours dans un treillis algébrique et spatiale ?* C'est encore une question dont la solution amène à obtenir des résultats de complétude et de décidabilité pour certaines variétés de treillis, que nous avons explorés dans le cadre de treillis n-distributifs [SW09].

3.3 Autour de la théorie des modèles des algèbres de Heyting

Participants : Luck Darnière, Luigi Santocanale, Friedrich Wehrung.

La théorie des modèles des algèbres de Heyting est au centre d'une question des plus intéressantes de la logique contemporaine. Rappelons d'abord qu'un topos [Joh02a, Joh02b] est une sorte d'univers d'ensembles dont la logique interne est intuitionniste ; et que l'ensemble des valeurs de vérité d'un topos possède une structure d'algèbre de Heyting. Une question se pose donc naturellement : *est-ce que toute algèbre de Heyting est l'ensemble des valeurs de vérité d'un topos ?* Il s'agit, selon Peter Johnstone, du problème ouvert le plus important de la théorie des topoi. C'est aussi une question très attractive pour nous, étant donné sa proximité, au moins en esprit, avec le grand problème de la théorie des treillis – auquel Friedrich Wehrung a récemment donné une réponse négative [Weh07] : *est-ce que tout treillis algébrique distributif est le treillis des congruences d'un certain treillis ?*

L'histoire de cette question est liée à une petite querelle. Pour lui donner une réponse positive, il faut pouvoir interpréter la logique intuitionniste d'ordre supérieur dans son fragment propositionnel. En tentant de démontrer que cela n'est pas possible, A. Pitts s'est aperçu que le fragment du premier ordre de logique intuitionniste s'interprète bien dans son fragment propositionnel [Pit92]. Un logicien géorgien, Dimitri Pataraia, a prétendu ensuite pouvoir fournir une réponse positive à la question [Pat03, Pat07], mais la communauté scientifique attend toujours une communication écrite documentant ce résultat. C'est ainsi que P. Johnstone [Joh09] a récemment présenté une reformulation personnelle, partielle, des résultats annoncés par Pataraia.

Cette discussion autour du problème ouvert le plus important de la théorie des topoi montre que la recherche autour des algèbres de Heyting est aujourd'hui plus que jamais active. Nous ne souhaitons pas, dans le cadre de ce projet, attaquer le problème fondamental de la théorie des topoi – cela demanderait des compétences importantes et spécifiques dans ce domaine. Cependant le projet nous donnera l'occasion de comprendre de plus près les difficultés soulevées par cette question. Il existe par ailleurs de nombreuses autres questions qui découlent des travaux de Pitts et sont en relation directe avec notre recherche.

Dans [GZ02] les auteurs réinterprètent le résultat de Pitts comme donnant l'existence d'une modèle-complétion de la théorie des algèbres de Heyting. Nous renvoyons le lecteur à la littérature existante à propos des modèle-complétions [Rob77]. L'existence de cette modèle-complétion est essentiellement équivalente au résultat de Pitts et au fait que les algèbres de Heyting ont la propriété d'amalgamation. Elle implique que toute algèbre de Heyting se plonge dans une algèbre de Heyting « assez spéciale » dans laquelle toute équation $p(\vec{x}) = q(\vec{x})$, où p, q sont des polynômes de la théorie des algèbres de Heyting, possède une solution dés qu'elle est satisfaisable (c'est-à-dire dés qu'elle possède des solutions dans au moins une extension de la sous-algèbre engendrée par les coefficients de p et q). Elle implique surtout que cette classe d'algèbres de Heyting ńăassez spécialesăż est élémentaire, au sens de la théorie des modèles.

Un résultat analogue est connu depuis bien longtemps pour la théorie des algèbres de Boole : cette théorie possède aussi une modèle-complétion. Dans ce contexte la signification des mots « assez spécial » est parfaitement claire : il s'agit des algèbres de Boole sans atomes. Il n'en va pas de même pour les algèbres de Heyting. Si l'existence d'un ensemble récursif d'axiomes pour la modèle-complétion de la théorie des algèbres de Heyting a été démontrée dans [GZ02], en revanche aucune axiomatisation intuitivement éclairante n'a pu en être exhibée à ce jour.

Nous souhaitons travailler sur les problèmes suivants :

1. ***Caractériser les modèles de la modèle-complétion des algèbres de Heyting.*** Des propriétés d'ordre de ces modèles sont déjà en évidence en [GZ02], par exemple un tel modèle ne possédera pas d'éléments sup-irréductibles ou inf-irréductibles. Cela est en fait une généralisation du fait que les modèles de la modèle-complétion de la théorie des algèbres de Boole sont les algèbres de Boole sans atomes. Mais peut-on trouver une liste complète finie de ces propriétés, comme pour les algèbres de Boole ? Cette question revient en fait à se demander si la modèle-complétion possède une axiomatisation finie. Deux axiomes ayant une signification topologique ont été introduits récemment par certains d'entre nous [DJ10], qui ont permis de démontrer un résultat de modèle-complétion pour les théories de certaines variétés localement finies d'algèbres de Heyting, mais le cas général résiste toujours.

   Un problème que nous pourrons rencontrer dans cette direction de recherche, est l'absence de modèles concrets de cette théorie : nous avons seulement des recettes générales pour les construire abstraitement. C'est donc une question en soi de découvrir des exemples ńăconcretsăż de ces modèles.

   Il faut souligner que les approches qui ont jusqu'ici été proposées pour étudier ce problème relèvent de point de vue très différents : nous avons déjà parlé de celui de A. Pitts, qui privilégie dans [Pit92] une approche plutôt syntaxique, tandis que S. Ghilardi et M. Zawadowski dans [GZ02] utilisent davantage d'algèbre universelle et de logique algébrique. Dans [DJ10] en revanche ce sont des techniques de théorie des modèles appliquées à l'algèbres qui sont employées, combinées à un peu de géométrie réelle. Regrouper pour la première fois des gens provenant de tous ces horizons (par exemple A. Santocanale a une connaissance spécifique des travaux S. Ghilardi tandis que L. Darnière est co-auteur de [DJ10]) est l'une des raisons qui font de ce projet une opportunité unique de produire de nouvelles avancées dans ce domaine.

2. ***Résolubilité des équations avec paramètres dans les HA libres finiment engendrées.*** Bien que l'existence d'une modèle-complétion résolve pour toute équation avec paramètres $p(\vec{x}) = q(\vec{x})$ la question de sa résolubilité dans une extension, on peut essayer de caractériser les équations qui ont des solutions dans une algèbre donnée, sans passer aux extensions. Évidemment cette question dépend de l'algèbre choisie, et nous prêterons une attention particulière aux algèbres de Heyting libres, étant donné leur nature universelle. Par exemple, nous mettrons à l'épreuve la conjecture suivante, qui porte sur la théorie des points fixes : tout système d'équations polynomiales de la forme $\vec{x} = p(\vec{x})$ admet une plus petite et une plus grande solution, dans une algèbre de Heyting libre finiment engendrée.

   Une autre question intimement liée est de savoir s'il est suffisant, pour qu'une équation avec paramètres $p(\vec{x}) = q(\vec{x})$ possède une solution dans une algèbre de Heyting libre finiment engendrée, qu'elle en possède une dans la complétion profinie de cette algèbre. L'idée sous-jacente est que cette complétion est à la fois la complétion profinie et la complétion pour une certaine distance ultra-métrique, comme l'ont montré L. Darnière et M. Junker dans [DJ09]. C'est une situation que l'on rencontre en bien d'autres endroits des mathématiques, et notamment dans l'étude des anneaux de valuations discrètes. Dans ce contexte c'est le lemme de Hensel, satisfait par la complétion, qui a permis les plus grandes avancées en théorie des modèles (et en arithmétique). Celui-ci peut s'énoncer en disant grosso modo que si un système d'équation polynômiale possède une solution suffisamment approchée (sous certaines conditions de lissité) alors il possède une solution exacte. Un énoncé analogue, s'il était valable pour les HA libres finiment engendrées ou leur complétion, ouvrirait dans ce domaine des perspectives entièrement nouvelles. L'expérience a montré que l'étude de ce problème nécessitait des compétences dans d'autres domaines que la théorie des modèles, et notamment en combinatoire. Les modèles de Kripke, chers aux modalistes, pourraient avoir ici un rôle à jouer à la frontière entre ces deux disciplines.

3.4 Chopped lattices in concurrency theory

Participants : Remi Morin, Maurice Pouzet, Luigi Santocanale.

Petri nets are a classical model in computer science to describe concurrent systems and their theory keeps developping since more than forty years [Pet73]. We are interested in few issues concerning rather simple Petri nets for which each place contains at most one token in each reachable marking. The semantics of these 1-safe Petri nets can be described by their marking graphs which give rise to a representation of their concurrent behaviors by means of partially order multisets (pomsets) called Mazurkiewicz traces [DR95]. A more abstract view of the semantics of a Petri net was initiated by Nielsen, Plotkin, and Winskel in [NPW81]. This approach describes all potential executions in a single object called an *event structure*. The latter is basically a partial order of events enriched with a conflict relation that formalizes which pairs of events cannot occur in a common execution. Event structures can be identified with a subclass of acyclic Petri nets called *occurrence nets*, which play a central role in the partial order approach of model-checking known as the unfolding technique. Event structures can be regarded as particular partial orders which have been given several characterizations such as coherent dI-domains or (distributive) *chopped lattices* – these latter structure being introduced in early sixties in relation to Dilworth congruence-lattice represenation problem [GS62]. They appear also as a particular case of algebraic CPOs or median graphs.

The unfolding of a Petri net is an event structure — or an occurrence net — provided with a mapping that associates each event with a transition of the Petri net. In other words, it is a *labeled event structure*. Although the expressive power of Petri nets has been characterized for more than thirty years, the study of the restricted case of *finite* Petri nets originates from Thiagarajan's work on *regular event structures* [Thi02]. It was shown that the unfolding of a finite Petri net yields a regular event structure. Our main goal is to tackle the conjecture from [Thi02] which asserts that any regular event structure corresponds to the unfolding of some finite Petri net. To do so we will continue the strategy initiated in [Mor05] which shows that this claim boils down to prove that any regular event structure admits a regular labeling. Of course this

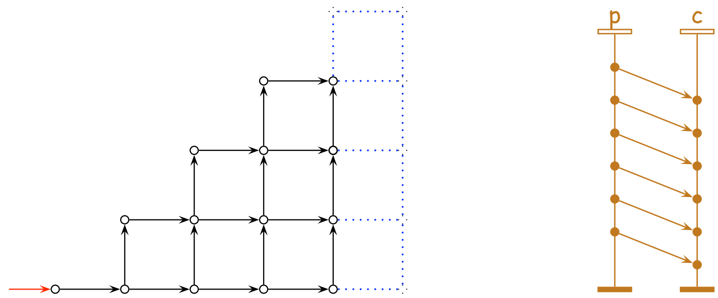

FIG. 1 – A chopped lattice and its event structure representation

issue can be rephrased in terms of chopped lattices.

The unfolding of Petri nets can be extended to product of automata or slightly more abstract descriptions of systems such coherent stably concurrent automata [BDK97]. A second interesting conjecture by Rozoy and Thiagarajan [RT91] asserts that each event structure with finite degree admits a *nice labeling*. Among us, this combinatorial question has raised a particular interest and has led to recent papers [San07a, San08] and to a new collboration [PS09]. We could establish first that this nice labeling problem corresponds precisely to show that event structures with finite degree are the unfolding of some coherent stably concurrent automaton *over a finite alphabet*. This connection would lead us a new duality for labeled event structures : By means of the relationships established in [HM00], these objects will be represented by coherent, prefix-closed and consistent sets of pomsets.

In this project we would like also to relate the conjecture about regular event structures to some logical setting. Consider for instance the lattice on the left-hand side of Figure 1. This lattice corresponds to some conflict-free event structure with two series of events, a series of p's (for production) together with a series of c's (for consumptions) as depicted on the right-hand side. It is interesting to notice that the lattice is not definable in monadic second order logic (MSOL) whereas the corresponding (labeled) partial order is. In other words it is sometimes easier to speak logically about the event structure that represents some chopped lattice. However this event structure is not regular. This raises the problem of comparing MSOL-definability and regularity for these objects. Due to the duality between labeled event structures and consistent sets of pomsets, it would be nice to establish a result similar to [KM02] as follows : an event structure is regular if and only if it is MSOL-definable and cut-bounded. Even the necessary condition could be useful to investigate in a logical way the conjecture about the regular event structures.

4 L'équipe

Le porteur du projet regrouper des chercheurs qui, à son avis, possèdent un grand potentiel et des fortes motivations pour développer des recherches en collaboration. Le porteur a rencontré ces chercheurs à différentes occasions, dont nous citerons les plus notables :

- lors du projet ANR jeunes chercheurs SOAPDC (Remi Morin),
- lors du groupe de travail Treillis Marseillais, qui a eu lieu à Marseille en avril 2007, et qui a été organisé dans le cadre du projet SOAPDC (Karell Bertet, Nathalie Caspard, Remi Morin, Maurice Pouzet, Friedrich Wehrung),
- lors de la conférence TANCL07, qui a eu lieu à Oxford en août 2007 (Luck Darnière).

En plus, deux autres chercheurs du LIF intégreront l'équipe :

- Frédéric Olive, qui a déjà collaboré avec Santocanale sur l'axiomatisation des espaces de convexité associés au groupes de Coxeter finis et à leurs treillis,
- François Brucker, qui vient d'intégrer au LIF, ayant développé un intérêt particulier pour les treillis et leurs liens avec les structures classificatoires.

Ainsi, l'équipe sera composé par un premier groupe de chercheur en provenance du Centre-Nord-Ouest de la France :

- Karell Bertet, Maître de Conférences, L3I, Université de La Rochelle,
- Nathalie Caspard, Maître de Conférences, LACL, Université Paris XII,
- Maurice Pouzet, Professeur Emeritus, LAPCS, Université Claude-Bernard,
- Luck Darnière, Maître de Conférences, Université Angers,
- Friedrich Wehrung, Directeur de Recherches, Laboratoire Nicolo Oresme, Université Caen.

Par contre, cet autre groupe de chercheurs est localisé au Sud, au Laboratorie d'Informatique Fondamentale de Marseille :

- François Brucker, Professeur, École Centrale de Marseille,
- Frédéric Olive, Maître de Conférences, Université Aix-Marseille I,
- Remi Morin, Professeur, Université Aix-Marseille II,
- Luigi Santocanale, Professeur, Université Aix-Marseille I.

4.1 Les CVs

Curriculum vitæ de Karell Bertet

Née le 27 Juillet 1972 à La Rochelle, France.

– Doctorat en Algorithmique à l'Université Denis-Diderot Paris 7 en Novembre 1998.
– Maître de Conférences en Informatique à l'université de La Rochelle, et membre du laboratoire L3I, depuis septembre 1999.
– Animatrice de l'équipe Imédoc du laboratire L3I.

Je compte 7 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 17 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte ? ? preprint.

Publications récentes :

[1] N. Girard. K. Bertet, M. Visani. Treillis dichotomiques et arbres de décision. A paraître dans la revue française Traitement du Signal. Accepté en Novembre 2009.

[2] M. Visani-K. Bertet et J.-M. Ogier. M. Coustaty, S. Guillas. Reconnaissance de symboles à partir d'une signature structurelle flexible et d'un classifieur de type treillis de galois. A paraître dans la revue française Traitement du Signal et de l'Information. Accepté en Octobre 2009.

[3] K. Bertet and B. Monjardet. The multiple facets of the canonical direct unit implicational basis. *Theoretical Computer Science*, 2010. À paraître, available at http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00308798.

[4] K. Bertet et J.-M. Ogier. S. Guillas. Extensions of bordat's algorithm for attributes. In *In Fifth International Conference on Concept Lattices and their Applications (CLA'2007)*, Montpellier, France, Octobre 2007.

[5] Karell Bertet and Mirabelle Nebut. Efficient algorithms on the Moore family associated to an implicational system. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 6(2) :315–338 (electronic), 2004.

Curriculum vitæ de Francois Brucker

Né le 11 avril 1974 à Saverne, France.

- Thèse de doctorat de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales (E.H.E.S.S) mention Mathématiques et Informatique, juillet 2001.
- Post-doctorat à l' ENST Bretagne sur le projet GENOMER (projet Contrat Plan État Région (CPER) Bretagne) de septembre 2001 à septembre 2002.
- Enseignant Chercheur à Télécom Bretagne, France de septembre 2002 à aout 2007.
- Maître de Conférence à l'université Paul Verlaine de Metz de septembre 2007 à aout 2009.
- Professeur des universités à l'Ecole Centrale de Marseille depuis septembre 2009.

Je compte 7 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 3 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte 1 livre. Je compte 1 preprint.

Publications récentes :

[1] Francois Brucker and Alain Gély. Crown free lattices and their related graphs. Preprint submit to Order, 2009.

[2] Jean-Pierre Barthélemy and Francois Brucker. Binary clustering. *Discrete Applied Mathematics*, 156 :1237–1250, 2008.

[3] Francois Brucker and Jean-Pierre Barthélemy. *Eléments de classification*. Hermes, London, 2007.

[4] Francois Brucker. Sub-dominant theory in numerical taxonomy. *Discrete Applied Mathematics*, 154 :1085–1099, 2006.

[5] François Brucker. From hypertrees to arboreal quasi-ultrametrics. *Discrete Applied Mathematics*, 147(1) :3–26, 2005.

Curriculum vitæ de Nathalie Caspard

Née le 22 août 1972 à Paris, France.

- Doctorat en Informatique à l'université paris 1 en Décembre 1998.
- Maître de Conférences en Informatique à l'UPEC (Université Paris-Est Créteil ex-Paris 12) depuis septembre 2000.
- Enseignante à l'ESIAG (École Supérieure en Informatique Appliquée à la Gestion des entreprises), département de l'UPEC.
- Responsable du diplôme L3 MIAGE en formation en alternance puis en initiale depuis 2004.

Je compte 11 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 6 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte 2 preprint.

Publications récentes :

[1] Nathalie Caspard. Des chaînes et des antichaînes dans les ensembles ordonnés finis. *Math. Inf. Sci. hum.*, 2010. Accepté. A paraître.

[2] Gabriela Bordalo Hauser, Nathalie Caspard, and Bernard Monjardet. Going down in (semi)lattices of moore families and convex geometries. 59(1) :249–271, 2009.

[3] Nathalie Caspard, Bruno Leclerc, and Bernard Monjardet. *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, volume 60 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2007.

[4] Nathalie Caspard, Claude Barbut, and Michel Morvan. Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded. *Adv. in Appl. Math.*, 33(1) :71–94, 2004.

[5] Nathalie Caspard. The lattice of permutations is bounded. *Internat. J. Algebra Comput.*, 10(4) :481–489, 2000.

Curriculum vitæ de Luck Darniere

Né le 10 avril 1969 à Abidjan, Côte d'Ivoire.

- Doctorat en Mathématiques à l'université de Rennes en janvier 1998.
- Maître de Conférences en Mathématiques à l'université d'Angers depuis septembre 1998.

Je compte 4 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 5 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte 3 preprint.

Publications récentes :

[1] Luck Darnière and Markus Junker. On Bellissima's construction of the finitely generated free Heyting algebras, and beyond. Submitted to Archive for Mathematical Logic.

[2] Luck Darnière and Markus Junker. Model-completion of varieties of co-heyting algebras. *Prépublications mathématiques d'Angers* 298, january 2010. `http ://math.univ-angers.fr`.

[3] Luck Darnière and Markus Junker. Codimension and pseudometric in co-Heyting algebras, 2009. To appear in Algebra Universalis.

[4] Luck Darnière. Model-completion of scaled lattices. arXiv math 0606792, June 2006.

Curriculum vitæ de Frédéric Olive

Né le 16 juillet 1964 à Paris, France.

- Doctorat en Informatique à l'université de Caen en Juillet 1996.
- Maître de Conférences en Informatique à l'université de Provence depuis septembre 1998.
- Membre de l'ANR ENUM sur la complexité des problèmes d'énumération.

Je compte 5 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 3 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte 1 preprint.

Publications récentes :

[1] G. Bagan, A. Durand, E. Grandjean, and F. Olive. Computing the jth solution of a first-order query. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 42(1) :147–164, 2008.

[2] A. Durand and F. Olive. First-order queries over one unary function. In Lecture Notes in Computer Science, editor, *Proc. Annual Conference of the EACSL (CSL'06)*, volume 4207, pages 334–348, 2006.

[3] A. Durand, E. Grandjean, and F. Olive. New results on arity vs. number of variables. Research Report 20-2004, LIF - Université de Provence, 2004.

[4] E. Grandjean and F. Olive. Graph properties checkable in linear time in the number of vertices. *Journal of Computer and System Sciences*, 68 :546–597, 2004.

[5] B. Courcelle and F. Olive. Une axiomatisation au premier ordre des arrangements de pseudodroites. *Annales de l'Institut Fourier*, 9(3) :883–903, 1999.

Curriculum vitæ de Remi Morin

Nom :	*MORIN*
Prénom :	*Rémi*
Né le :	*23 décembre 1969 (40 ans)*
Grade :	*Professeur des universités, 2ième classe*
Établissement :	*Université de la Méditerranée Aix-Marseille II*
Section CNU :	*27*
Page web :	http ://www.lif.univ-mrs.fr/~morin

Je suis chercheur au *Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille (LIF)* depuis septembre 2001, d'abord en tant que maître de conférences et depuis septembre 2006 en tant que professeur. Je travaille dans l'équipe *Modélisation et Vérification*. J'étudie particulièrement les modèles de systèmes distribués ou parallèles ainsi que les techniques à base d'ordres partiels pour la spécification et la vérification de ces systèmes.

Projets ANR Je participe au projet CHOCO (Curry-HOward et COncurrence) à hauteur de 30%.

Publications récentes :

[1] Jean Fanchon and Rémi Morin. Pomset languages of finite step transition systems. In *Petri Nets*, pages 83–102, 2009.

[2] Rémi Morin. MSO logic for unambiguous shared-memory systems. In *Developments in Language Theory*, pages 516–528, 2008.

[3] Rémi Morin. Semantics of deterministic shared-memory systems. In *CONCUR*, pages 36–51, 2008.

[4] Nicolas Baudru and Rémi Morin. Synthesis of safe message-passing systems. In *FSTTCS*, pages 277–289, 2007.

[5] Nicolas Baudru and Rémi Morin. The synthesis problem of netcharts. In *ICATPN*, pages 84–104, 2006.

[6] Nicolas Baudru and Rémi Morin. Unfolding synthesis of asynchronous automata. In *CSR*, pages 46–57, 2006.

Curriculum vitæ de Maurice Pouzet

- Nom/prénom : POUZET Maurice
- Date et lieu de naissance : 19 Octobre 1945 à Brive la Gaillarde (Corrèze).
- Divorcé, 4 enfants, 5 petits-enfants.
- Études Doctorat de 3ième cycle : "Sur certaines algèbres préordonnées par divisibilité" ; Université Claude-Bernard, 13 Avril 1970. Doctorat d'état : "Sur la théorie des relations", Université Claude-Bernard, 23 Janvier 1978, Jury : J.Braconnier, G.Choquet, E.Corominas, R.Fraïssé, E.Specker.
- Carrière Assistant Université Claude-Bernard Lyon 1, 1ier Octobre 1969 ; Maître-Assistant 1ier Octobre 1971. Professeur de 2ième classe : 1ier Février 1983. Professeur de 1ère classe, 1ier Janvier 1987. Retraité le 18 Octobre 2008.
- Situation actuelle : Professeur émérite Université Claude-Bernard, 19 Octobre 2008– Adjunct-Professor, The University of Calgary, July 1, 2008–. Membre de l'ICJ (Institut Camille Jordan) de l'Université Claude-Bernard.

Mon activité porte sur les Mathématiques Discrètes et leur interaction avec des sciences appliquées comme l'Informatique. Les recherches que je mène portent plus précisément sur l'ordre et son intervention dans d'autres domaines comme la combinatoire des structures finies (et, plus récemment, la modélisation des calculs, l'analyse ordinale des données). Le bilan consiste en 105 articles publiés, 19 directions de thèses soutenues (dont 2 thèses d'état) et 3 habilitations ; 7 rencontres internationales organisées, seul ou en collaboration depuis 1982 ; coédition des actes de 3 rencontres ; membre des comités de rédaction de deux revues internationales ;

Publications récentes :

[1] Y. Boudabbous and M. Pouzet. The morphology of infinite tournaments. application to the growth of their profile. *European J. of combinatorics*, (31) :419–676, 2010.

[2] Jamel Dammak, Gérard Lopez, Maurice Pouzet, and Hamza Si Kaddour. Hypomorphy of graphs up to complementation. *J. Combin. Theory Ser. B*, 99(1) :84–96, 2009.

[3] Miguel Couceiro and Maurice Pouzet. On a quasi-ordering on Boolean functions. *Theoret. Comput. Sci.*, 396(1-3) :71–87, 2008.

[4] Maurice Pouzet. When is the orbit algebra of a group an integral domain ? Proof of a conjecture of P. J. Cameron. *Theor. Inform. Appl.*, 42(1) :83–103, 2008.

[5] Christian Delhommé, Claude Laflamme, Maurice Pouzet, and Norbert Sauer. Divisibility of countable metric spaces. *European J. Combin.*, 28(6) :1746–1769, 2007.

Curriculum vitæ de Luigi Santocanale

Né le 13 novembre 1967 à Milan, Italie.

- Doctorat en Mathématiques à l'université du Québec à Montréal en Avril 2000.
- Maître de Conférences en Informatique à l'université de Provence depuis septembre 2003.
- Maître de Conférences en Informatique à l'université de Provence depuis septembre 2009.
- Responsable du projet ANR SOAPDC. Responsable du projet Van Gogh Modal Fixpoint Logics.

Je compte 11 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture. Je compte 15 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture. Je compte 1 preprint.

Publications récentes :

[1] J. Robin B. Cockett and Luigi Santocanale. On the word problem for $\Sigma\Pi$-categories, and the properties of two-way communication. In Erich Grädel and Reinhard Kahle, editors, *CSL*, volume 5771 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 194–208. Springer, 2009.

[2] Luigi Santocanale. A nice labelling for tree-like event structures of degree 3. To appear in a special issue of the journal Information and Computation dedicated to conference CONCUR 2007, May 2008.

[3] Luigi Santocanale. Completions of μ-algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, 154(1) :27–50, 2008.

[4] Luigi Santocanale. Derived semidistributive lattices. To appear in the journal Algebra Universalis, July 2007.

[5] Luigi Santocanale. On the join dependency relation in multinomial lattices. *Order*, 24(3) :155–179, 2007.

Curriculum vitæ de Friedrich Wehrung

Né le 8 juin 1961 à Chelles (77).

- **Élève au Lycée Fabert** (Metz) de 1976 à 1979. Baccalauréat C en 1979 (mention B). Juillet 1981 : reçu à l'École Normale Supérieure (ENS Ulm) (rang 9).
- **Élève à l'ENS Ulm** de 1981 à 1985. Agrégation de mathématiques en 1983 (rang 7). DEA de mathématiques pures en 1983, sous la direction de J. L. Krivine (titre : *Forcing ; mesure et catégorie dans le modèle de Levy-Solovay*).
- **Assistant Normalien** (=AMN) à l'Université de Caen de 1985 à 1987. Service d'enseignement, niveaux allant du DEUG à l'Agrégation. Doctorat de l'Université de Caen en 1987, titre *Non absoluité de l'injection élémentaire associée à un ultrafiltre complet*, jury composé de P. Dehornoy, M. Foreman, J. L. Krivine, A. Louveau, et J. Stern.
- **Teaching assistant** à Ohio State University de Juillet 1987 à Juillet 1988.
- **Chargé de recherche au CNRS** de novembre 1988 à juillet 2005. Habilitation, titre *Aspects algébriques et ensemblistes des monoïdes positivement ordonnés*, présentée le 21 septembre 1992, jury composé de P. Dehornoy, M. Foreman, J. L. Krivine, M. Pouzet, J. P. Ressayre, M. P. Schützenberger, R. M. Shortt. Promotion CR 1 en novembre 1992.
- **Promotion DR 2 (CNRS)** en juillet 2005.

Marié, un enfant (née en 1994).

Sauf erreur, je compte 72 articles parus ou acceptés dans des revues à comité de lecture, dont 5 notes (C.R.A.S. ou Proc. Amer. Math. Soc.). S'y ajoutent 1 préprint, 3 contributions à des actes de conférences ou congrès à comité de lecture, et un appendice dans la seconde édition de la monographie de G. Grätzer sur la théorie des treillis.

Publications récentes :

[1] Pere Ara, Francesc Perera, and Friedrich Wehrung. Finitely generated antisymmetric graph monoids. *J. Algebra*, 320(5) :1963–1982, 2008.

[2] Pavel Ružička, Jiří Tuma, and Friedrich Wehrung. Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras. *J. Algebra*, 311(1) :96–116, 2007.

[3] Friedrich Wehrung. A solution of Dilworth's congruence lattice problem. *Adv. Math.*, 216(2) :610–625, 2007.

[4] Enrique Pardo and Friedrich Wehrung. Semilattices of groups and nonstable K-theory of extended Cuntz limits. *K-Theory*, 37(1-2) :1–23, 2006.

[5] Friedrich Wehrung. Von Neumann coordinatization is not first-order. *J. Math. Log.*, 6(1) :1–24, 2006.

5 Bibliographie

[AM06] Marcelo Aguiar and Swapneel Mahajan. *Coxeter groups and Hopf algebras*, volume 23 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. With a foreword by Nantel Bergeron.

[BB05] Anders Björner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005.

[BB07] F. Brucker and J.-P. Barthélemy. *Eléments de classification*. Hermes, Londres, 2007.

[BB08] J.-P. Barthélemy and F. Brucker. Binary clustering. *Discrete Applied Mathematics*, 156 :1237–1250, 2008.

[BCC07] Claude Barbut, Nathalie Caspard, and Henry Crapo. Les arrangements de lignes des groupes de coxeter. Exposé à l'occasion de la recontre Treillis Marsaillais, CIRM, Marseille, April 2007.

[BDK97] Felipe Bracho, Manfred Droste, and Dietrich Kuske. Representation of computations in concurrent automata by dependence orders. *Theor. Comput. Sci.*, 174(1-2) :67–96, 1997.

[BG09a] F. Brucker and A. Gély. Crown free lattices and their related graphs. Preprint soumis à Order, 2009.

[BG09b] F. Brucker and A. Gély. Parsimonious cluster systems. *Advances in Data Analysis and Classification*, 3 :189–204, 2009.

[Bjö84] Anders Björner. Orderings of Coxeter groups. In *Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983)*, volume 34 of *Contemp. Math.*, pages 175–195. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[BM70a] Marc Barbut and Bernard Monjardet. *Ordre et classification : algèbre et combinatoire. Tome I.* Librairie Hachette, Paris, 1970. Méthodes Mathématiques des Sciences de l'Homme, Collection Hachette Université.

[BM70b] Marc Barbut and Bernard Monjardet. *Ordre et classification : algèbre et combinatoire. Tome II.* Librairie Hachette, Paris, 1970. Méthodes Mathématiques des Sciences de l'Homme, Collection Hachette Université.

[BM10] K. Bertet and B. Monjardet. The multiple facets of the canonical direct unit implicational basis. *Theoretical Computer Science*, 2010. À paraître, available at http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00308798.

[BN04] Karell Bertet and Mirabelle Nebut. Efficient algorithms on the Moore family associated to an implicational system. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 6(2) :315–338 (electronic), 2004.

[Bru08] F. Brucker. *Classifications en classes empiétantes, modèles et algorithmes*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Verlaine de Metz, 2008.

[Cas00] Nathalie Caspard. The lattice of permutations is bounded. *Internat. J. Algebra Comput.*, 10(4) :481–489, 2000.

[CB04] Nathalie Caspard and Claude Barbut. Tamari lattices are bounded : a new proof. Technical Report TR-2004-03, LACL, Université Paris XII, 2004.

[CBM04] Nathalie Caspard, Claude Barbut, and Michel Morvan. Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded. *Adv. in Appl. Math.*, 33(1) :71–94, 2004.

[CLM07] Nathalie Caspard, Bruno Leclerc, and Bernard Monjardet. *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, volume 60 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2007.

[CP09] Willem Conradie and Alessandra Palmigiano. Expanding sahlqvist correspondence for lattice-based logics : the inductive fragment. talk at the conference TACL09, 2009.

[DF99] Jean-Paul Doignon and Jean-Claude Falmagne. *Knowledge spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[DJ09] Luck Darnière and Markus Junker. Codimension and pseudometric in co-Heyting algebras, 2009. To appear in Algebra Universalis.

[DJ10] Luck Darnière and Markus Junker. Model-completion of varieties of co-heyting algebras. *Prépublications mathématiques d'Angers* 298, january 2010. `http ://math.univ-angers.fr`.

[DP02] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order.* Cambridge University Press, New York, second edition, 2002.

[DR95] V. Diekert and G. Rozenberg. *The Book of Traces.* World Scientific, Singapore, 1995.

[Esa74] L. L. Esakia. Topological Kripke models. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 214 :298–301, 1974.

[GD86] J. L. Guigues and V. Duquenne. Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. *Math. Sci. Humaines*, (95) :5–18, 83, 1986.

[Geh06] Mai Gehrke. Generalized Kripke frames. *Studia Logica*, 84(2) :241–275, 2006.

[GH01] Mai Gehrke and John Harding. Bounded lattice expansions. *J. Algebra*, 238(1) :345–371, 2001.

[GHV04] Robert Goldblatt, Ian Hodkinson, and Yde Venema. Erdős graphs resolve Fine's canonicity problem. *Bull. Symbolic Logic*, 10(2) :186–208, 2004.

[Gol06] Robert Goldblatt. A Kripke-Joyal semantics for noncommutative logic in quantales. In *Advances in modal logic. Vol. 6*, pages 209–225. Coll. Publ., London, 2006.

[Grä03] George Grätzer. *General lattice theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. With appendices by B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille, Reprint of the 1998 second edition [MR1670580].

[GS62] G. Grätzer and E. T. Schmidt. On congruence lattices of lattices. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 13 :179–185, 1962.

[GV06] Valentin Goranko and Dimiter Vakarelov. Elementary canonical formulae : extending Sahlqvist's theorem. *Ann. Pure Appl. Logic*, 141(1-2) :180–217, 2006.

[GW99] Bernhard Ganter and Rudolf Wille. *Formal concept analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1999. Mathematical foundations, Translated from the 1996 German original by Cornelia Franzke.

[GW03] G. Grätzer and F. Wehrung. On the number of join-irreducibles in a congruence representation of a finite distributive lattice. *Algebra Universalis*, 49(2) :165–178, 2003. Dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota.

[GZ02] Silvio Ghilardi and Marek Zawadowski. *Sheaves, games, and model completions*, volume 14 of *Trends in Logic—Studia Logica Library.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002. A categorical approach to nonclassical propositional logics.

[Ham09] Tarek Hamrouni. *Mining concise representations of frequent patterns through conjunctive and disjunctive search spaces.* PhD thesis, University of Tunis El Manar, 2009.

[Har92] Gerd Hartung. A topological representation of lattices. *Algebra Universalis*, 29(2) :273–299, 1992.

[HD97] C. Hartonas and J. M. Dunn. Stone duality for lattices. *Algebra Universalis*, 37(3) :391–401, 1997.

[HM00] Jean-François Husson and Rémi Morin. On recognizable stable trace languages. In Jerzy Tiuryn, editor, *FoSSaCS*, volume 1784 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 177–191. Springer, 2000.

[HT72] Samuel Huang and Dov Tamari. Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13 :7–13, 1972.

[JM09] Peter Jipsen and M. Andrew Moshier. Topological duality and lattice expansions part i : A topological construction of canonical extensions. talk given at TACL 2009., July 2009.

[Joh02a] Peter T. Johnstone. *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. Vol. 1*, volume 43 of *Oxford Logic Guides.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2002.

[Joh02b] Peter T. Johnstone. *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. Vol. 2*, volume 44 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Joh09] Peter Johnstone. High order cylindric heyting algebras. Exposé à l'occasion de la conférence CT2009, Le cap, July 2009.

[KB10] E. MephuNguifo K. Bertet, T. Hamrouni. A new algorithm computing minimal generators. En cours de rédaction, 2010.

[KM02] Dietrich Kuske and Rémi Morin. Pomsets for local trace languages. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 7(2) :187–224, 2002.

[LR02] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees. *J. Algebraic Combin.*, 15(3) :253–270, 2002.

[Mai83] David Maier. *The theory of relational databases*. Computer Software Engineering Series. Computer Science Press, Rockville, MD, 1983.

[MC97] Bernard Monjardet and Nathalie Caspard. On a dependence relation in finite lattices. *Discrete Math.*, 165/166 :497–505, 1997. Graphs and combinatorics (Marseille, 1995).

[McK72] Ralph McKenzie. Equational bases and nonmodular lattice varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 174 :1–43, 1972.

[Mon90] B. Monjardet. Arrowian characterizations of latticial federation consensus functions. *Math. Social Sci.*, 20(1) :51–71, 1990.

[Mor05] Rémi Morin. Concurrent automata vs. asynchronous systems. In Joanna Jedrzejowicz and Andrzej Szepietowski, editors, *MFCS*, volume 3618 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 686–698. Springer, 2005.

[Nat90] J. B. Nation. An approach to lattice varieties of finite height. *Algebra Universalis*, 27(4) :521–543, 1990.

[NPW81] Mogens Nielsen, Gordon D. Plotkin, and Glynn Winskel. Petri nets, event structures and domains, part i. *Theor. Comput. Sci.*, 13 :85–108, 1981.

[OS09] Frédéric Olive and Luigi Santocanale. Lattices of biconvex sets. Notes privés, 2009.

[Pat03] Dimitri Pataraia. The high order cylindric algebras and topoi. Exposé à l'occasion de la conférence TANCL03, Tblissi, July 2003.

[Pat07] Dimitri Pataraia. Interpretation of higher order propositional quantification in some linear orders. Exposé à l'occasion de la conférence TANCL07, Oxford, August 2007.

[Pet73] C. A. Petri. Concepts of net theory. In *MFCS*, pages 137–146, 1973.

[Pig09] Adrian Pigors. Categories of generalized frames. talk given at TACL 2009., July 2009.

[Pit92] Andrew M. Pitts. On an interpretation of second-order quantification in first-order intuitionistic propositional logic. *J. Symbolic Logic*, 57(1) :33–52, 1992.

[Pri70] H. A. Priestley. Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces. *Bull. London Math. Soc.*, 2 :186–190, 1970.

[PS09] Maurice Pouzet and Luigi Santocanale. On a conjecture by assous et al. En redaction, August 2009.

[Rea06] Nathan Reading. Cambrian lattices. *Adv. Math.*, 205(2) :313–353, 2006.

[Riv74] Ivan Rival. Lattices with doubly irreducible elements. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(1) :91–95, 1974.

[Rob77] A. Robinson. *Complete theories*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1977.

[RT91] Brigitte Rozoy and P. S. Thiagarajan. Event structures and trace monoids. *Theor. Comput. Sci.*, 91(2) :285–313, 1991.

[RW95] A. Rush and R. Wille. Knowledge spaces and formal concept analysis. In H.H. Bock and W. Polasek, editors, *Data Analysis and Information Systems*, pages 427–436, Berlin, 1995. Springer Verlag.

[Sah75] Henrik Sahlqvist. Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic. In *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium (Univ. Uppsala, Uppsala, 1973)*, pages 110–143. Stud. Logic Found. Math., Vol. 82, Amsterdam, 1975. North-Holland.

[San07a] Luigi Santocanale. A nice labelling for tree-like event structures of degree 3. In Luís Caires and Vasco Thudichum Vasconcelos, editors, *CONCUR 2007*, volume 4703 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 151–165. Springer, 2007. Proceedings of the 18th International Conference on Concurrency Theory, Lisbon, Portugal, September 3-8, 2007.

[San07b] Luigi Santocanale. On the join dependency relation in multinomial lattices. *Order*, 24(3) :155–179, 2007.

[San08] Luigi Santocanale. A nice labelling for tree-like event structures of degree 3. To appear in a special issue of the journal Information and Computation dedicated to conference CONCUR 2007, May 2008.

[San09a] Luigi Santocanale. A duality for finite lattices. Preprint available at http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00432113, 2009.

[San09b] Luigi Santocanale. A duality for finite lattices. talk given at TACL 2009., July 2009.

[Sem05] M. V. Semenova. On lattices that are embeddable into lattices of suborders. *Algebra and Logic*, 44(4) :270–285, 2005.

[Sto36] M. H. Stone. The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(1) :37–111, 1936.

[Suz08] Tomoyuki Suzuki. Canonicity results of substructural and lattice-based logics. accepted by The Review of Symbolic Logic, 2008.

[SV09] Luigi Santocanale and Yde Venema. Notes on monotone modal logic. Notes privés, 2009.

[SW09] Luigi Santocanale and Friedrich Wehrung. The variety of n-distributive lattices is generated by its finite members. Notes privés, 2009.

[TB02] R. Taouil and Y. Bastide. Computing proper implications. In *9th International Conference on Conceptual Structures, Stanford, USA*, 2002.

[Thi02] P. S. Thiagarajan. Regular event structures and finite petri nets : A conjecture. In Wilfried Brauer, Hartmut Ehrig, Juhani Karhumäki, and Arto Salomaa, editors, *Formal and Natural Computing*, volume 2300 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 244–256. Springer, 2002.

[Weh07] Friedrich Wehrung. A solution of Dilworth's congruence lattice problem. *Adv. Math.*, 216(2) :610–625, 2007.

[Weh09] Friedrich Wehrung. Vegetable gardens. Notes privés, 2009.