# Variétés d'ordres

Paul Ruet

CNRS - Institut de Mathématiques de Luminy
ruet@iml.univ-mrs.fr

23 février 2007

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R\restriction_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R\restriction_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R\restriction_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

# Notations préliminaires

$R$ relation binaire $\mapsto$ $|R|$ son support

$R{\restriction}_X$ sa restriction à $X \subseteq |R|$

$\omega, \tau$ ordres partiels $\mapsto$ somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$

$|\omega| \cap |\tau| = \varnothing$ somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (|\omega| \times |\tau|)$

ordres partiels sur $|\omega| \cup |\tau|$

ordre série-parallèle $=$ ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$

à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R\restriction_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R{\restriction}_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

# Notations préliminaires

| | | |
|---|---|---|
| $R$ relation binaire | $\mapsto$ | $\lvert R\rvert$ son support |
| | | $R{\restriction}_X$ sa restriction à $X \subseteq \lvert R\rvert$ |
| $\omega, \tau$ ordres partiels | $\mapsto$ | somme parallèle $\omega \parallel \tau = \omega \cup \tau$ |
| $\lvert\omega\rvert \cap \lvert\tau\rvert = \varnothing$ | | somme série $\omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (\lvert\omega\rvert \times \lvert\tau\rvert)$ |
| | | ordres partiels sur $\lvert\omega\rvert \cup \lvert\tau\rvert$ |
| ordre série-parallèle | $=$ | ordre partiel construit au moyen de $\prec, \parallel$ |
| | | à partir des ordres sur $\varnothing$ et les singletons |

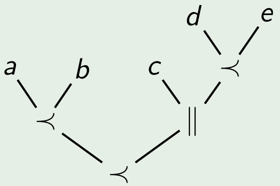
# Notations préliminaires

$$
\begin{array}{lcl}
R \text{ relation binaire} & \mapsto & |R| \text{ son support} \\
 & & R{\restriction}_X \text{ sa restriction à } X \subseteq |R| \\
\omega, \tau \text{ ordres partiels} & \mapsto & \text{somme parallèle } \omega \parallel \tau = \omega \cup \tau \\
|\omega| \cap |\tau| = \varnothing & & \text{somme série } \omega \prec \tau = \omega \cup \tau \cup (|\omega| \times |\tau|) \\
 & & \text{ordres partiels sur } |\omega| \cup |\tau| \\
\text{ordre série-parallèle} & = & \text{ordre partiel construit au moyen de } \prec, \parallel \\
 & & \text{à partir des ordres sur } \varnothing \text{ et les singletons}
\end{array}
$$

# Notations préliminaires

## Exemple d'ordre série-parallèle

$(a \prec b \prec (c \parallel (d \prec e)))$ représenté par l'arbre enraciné



# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | $=$ | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | $=$ | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | = | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | = | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | = | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | = | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |


N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

Ordre cyclique = relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est :

- cyclique $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$
- anti-reflexive $\neg\alpha(x,x,y)$
- transitive $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$

Cycle = ordre cyclique $\alpha$ qui est :

- total $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$


N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | $=$ | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | $=$ | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | $=$ | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | $=$ | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

**Ordre cyclique** = relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est :

- **cyclique** $\alpha(x, y, z) \Rightarrow \alpha(y, z, x)$
- **anti-reflexive** $\neg\alpha(x, x, y)$
- **transitive** $\alpha(x, y, z)$ et $\alpha(z, t, x) \Rightarrow \alpha(y, z, t)$

**Cycle** = ordre cyclique $\alpha$ qui est :

- **total** $\alpha(x, y, z)$ ou $\alpha(z, y, x)$

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Ordres cycliques

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ordre cyclique | = | relation ternaire $\alpha$ sur un ensemble $X$ qui est : | |
| | | cyclique | $\alpha(x,y,z) \Rightarrow \alpha(y,z,x)$ |
| | | anti-reflexive | $\neg\alpha(x,x,y)$ |
| | | transitive | $\alpha(x,y,z)$ et $\alpha(z,t,x) \Rightarrow \alpha(y,z,t)$ |
| Cycle | = | ordre cyclique $\alpha$ qui est : | |
| | | total | $\alpha(x,y,z)$ ou $\alpha(z,y,x)$ |

N. Megiddo.
Partial and complete cyclic orders.
*Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(2) :274–276, 1976.

V. Novák.
Cyclically ordered sets.
*Czechoslovak Mathematical Journal*, 32(107) :460–473, 1982.

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ relation ternaire sur $X$, $x \in X$ | $\mapsto$ | $\alpha_x$ relation binaire sur $X \setminus \{x\}$ |
| | | $\alpha_x(y, z) \Leftrightarrow \alpha(x, y, z)$ |
| $\alpha$ ordre cyclique | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre (partiel) |
| $\alpha$ cycle | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre total |

### Exemple

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x, y, z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ relation ternaire sur $X$, $x \in X$ | $\mapsto$ | $\alpha_x$ relation binaire sur $X \setminus \{x\}$ <br> $\alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z)$ |
| $\alpha$ ordre cyclique | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre (partiel) |
| $\alpha$ cycle | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre total |

**Exemple**

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x,y,z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ relation ternaire sur $X$, $x \in X$ | $\mapsto$ | $\alpha_x$ relation binaire sur $X \setminus \{x\}$ |
| | | $\alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z)$ |
| $\alpha$ ordre cyclique | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre (partiel) |
| $\alpha$ cycle | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre total |

### Exemple

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x, y, z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

$$\begin{array}{lcl}
\alpha \text{ relation ternaire sur } X,\ x \in X & \mapsto & \alpha_x \text{ relation binaire sur } X \setminus \{x\} \\
 & & \alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z) \\
\alpha \text{ ordre cyclique} & \Rightarrow & \alpha_x \text{ ordre (partiel)} \\
\alpha \text{ cycle} & \Rightarrow & \alpha_x \text{ ordre total}
\end{array}$$

**Exemple**

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x, y, z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ relation ternaire sur $X$, $x \in X$ | $\mapsto$ | $\alpha_x$ relation binaire sur $X \setminus \{x\}$ <br> $\alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z)$ |
| $\alpha$ ordre cyclique | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre (partiel) |
| $\alpha$ cycle | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre total |

## Exemple

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x,y,z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ relation ternaire sur $X$, $x \in X$ | $\mapsto$ | $\alpha_x$ relation binaire sur $X \setminus \{x\}$ |
| | | $\alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z)$ |
| $\alpha$ ordre cyclique | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre (partiel) |
| $\alpha$ cycle | $\Rightarrow$ | $\alpha_x$ ordre total |

## Exemple

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x, y, z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres cycliques aux ordres : focalisation

$$\begin{array}{lcl}
\alpha \text{ relation ternaire sur } X,\ x \in X & \mapsto & \alpha_x \text{ relation binaire sur } X \setminus \{x\} \\
 & & \alpha_x(y,z) \Leftrightarrow \alpha(x,y,z) \\
\alpha \text{ ordre cyclique} & \Rightarrow & \alpha_x \text{ ordre (partiel)} \\
\alpha \text{ cycle} & \Rightarrow & \alpha_x \text{ ordre total}
\end{array}$$

## Exemple

$X = \{x, y, z, t\}$

$\alpha = xyz$ clôture cyclique de $\{(x, y, z)\}$

$\alpha$ ordre cyclique sur $X$

$\alpha_x = ((y \prec z) \parallel t)$

$\alpha_t = (x \parallel y \parallel z)$

# Des ordres aux ordres cycliques

$(\omega(x))_{x \in X}$ famille "cyclique" d'ordres partiels : $|\omega(x)| = X \setminus \{x\}$ et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$ $\mapsto$ ordre cyclique $\alpha$ sur $X$ t.q. $\alpha_x = \omega(x)$

**En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$**

$\alpha = xyz$ sur $\{x, y, z, t\}$

$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Des ordres aux ordres cycliques

$(\omega(x))_{x\in X}$ famille "cyclique" $\mapsto$ ordre cyclique $\alpha$ sur $X$
d'ordres partiels : $|\omega(x)| = X \setminus \{x\}$ t.q. $\alpha_x = \omega(x)$
et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$

**En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$**

$\alpha = xyz$ sur $\{x,y,z,t\}$
$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Des ordres aux ordres cycliques

$(\omega(x))_{x \in X}$ famille "cyclique" d'ordres partiels : $|\omega(x)| = X \setminus \{x\}$ et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$ $\quad \mapsto \quad$ ordre cyclique $\alpha$ sur $X$ t.q. $\alpha_x = \omega(x)$

**En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$**

$\alpha = xyz$ sur $\{x, y, z, t\}$

$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Des ordres aux ordres cycliques

$(\omega(x))_{x \in X}$ famille "cyclique" d'ordres partiels : $|\omega(x)| = X \setminus \{x\}$ et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$ $\mapsto$ ordre cyclique $\alpha$ sur $X$ t.q. $\alpha_x = \omega(x)$

## En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$

$\alpha = xyz$ sur $\{x, y, z, t\}$

$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Des ordres aux ordres cycliques

$(\omega(x))_{x \in X}$ famille "cyclique" d'ordres partiels : $|\omega(x)| = X \setminus \{x\}$ et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$ $\mapsto$ ordre cyclique $\alpha$ sur $X$ t.q. $\alpha_x = \omega(x)$

## En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$

$\alpha = xyz$ sur $\{x, y, z, t\}$

$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Des ordres aux ordres cycliques

| | | |
|---|---|---|
| $(\omega(x))_{x \in X}$ famille "cyclique" | $\mapsto$ | ordre cyclique $\alpha$ sur $X$ |
| d'ordres partiels : $\lvert\omega(x)\rvert = X \setminus \{x\}$ | | t.q. $\alpha_x = \omega(x)$ |
| et $\omega(x)(y,z) \Rightarrow \omega(y)(z,x)$ | | |

## En général, un seul $\omega(x) \not\mapsto \alpha$

$\alpha = xyz$ sur $\{x, y, z, t\}$

$\alpha_t$ vide

Pas moyen de retrouver $\alpha$

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres $=$ ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :

$\alpha(x, y, z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t, y, z)$ ou $\alpha(x, t, z)$ ou $\alpha(x, y, t)$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres = ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :
$\alpha(x, y, z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t, y, z)$ ou $\alpha(x, t, z)$ ou $\alpha(x, y, t)$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres = ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :
$\alpha(x, y, z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t, y, z)$ ou $\alpha(x, t, z)$ ou $\alpha(x, y, t)$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

**Variété d'ordres** = ordre cyclique $\alpha$ qui est **étalé** sur $X$ :
$\alpha(x,y,z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t,y,z)$ ou $\alpha(x,t,z)$ ou $\alpha(x,y,t)$


V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.


**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres = ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :
$\alpha(x, y, z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t, y, z)$ ou $\alpha(x, t, z)$ ou $\alpha(x, y, t)$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres $=$ ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :
$$\alpha(x,y,z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t,y,z) \text{ ou } \alpha(x,t,z) \text{ ou } \alpha(x,y,t)$$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

**Proposition**

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Variétés d'ordres

Variété d'ordres $=$ ordre cyclique $\alpha$ qui est étalé sur $X$ :

$$\alpha(x,y,z) \Rightarrow \forall t, \alpha(t,y,z) \text{ ou } \alpha(x,t,z) \text{ ou } \alpha(x,y,t)$$

V. M. Abrusci and P. Ruet.
Non-commutative logic I : the multiplicative fragment.
*Annals of Pure and Applied Logic*, 101(1) :29–64, 2000.

P. Ruet.
Non-commutative logic II : sequent calculus and phase semantics.
*Mathematical Structures in Computer Science*, 10(2) :277–312, 2000.

## Proposition

*Cycle $\Rightarrow$ variété d'ordres $\Rightarrow$ ordre cyclique.*

# Espèces de structure

$\mathbf{O}(X)$ = ensemble des ordres partiels (binaires) sur $X$

$\mathbf{C}(X)$ = ensemble des ordres cycliques sur $X$

$\mathbf{V}(X)$ = ensemble des variétés d'ordres sur $X$

Ce sont des espèces de structure.

A. Joyal.
Une théorie combinatoire des séries formelles.
*Advances in Mathematics*, 42 :1–82, 1981.

# Espèces de structure

$$\textbf{O}(X) = \text{ensemble des ordres partiels (binaires) sur } X$$
$$\textbf{C}(X) = \text{ensemble des ordres cycliques sur } X$$
$$\textbf{V}(X) = \text{ensemble des variétés d'ordres sur } X$$

Ce sont des espèces de structure.

A. Joyal.
Une théorie combinatoire des séries formelles.
*Advances in Mathematics*, 42 :1–82, 1981.

# Collage

$$\omega \text{ ordre partiel sur } X \quad \mapsto \quad \overline{\omega} \text{ variété d'ordres sur } X$$

$$\begin{aligned} \overline{\omega}(x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \omega\restriction_{\{x,y,z\}} \quad &= \quad (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z) \\ &\text{ou} \quad (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x) \\ &\text{ou} \quad (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y) \end{aligned}$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Collage

$\omega$ ordre partiel sur $X$ $\quad\mapsto\quad$ $\overline{\omega}$ variété d'ordres sur $X$

$$
\begin{array}{lll}
\overline{\omega}(x,y,z) \Leftrightarrow \omega\restriction_{\{x,y,z\}} & = & (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z) \\
 & \text{ou} & (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x) \\
 & \text{ou} & (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y)
\end{array}
$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Collage

$\omega$ ordre partiel sur $X$ $\quad\mapsto\quad$ $\overline{\omega}$ variété d'ordres sur $X$

$$\begin{aligned}\overline{\omega}(x,y,z) \quad\Leftrightarrow\quad \omega\restriction_{\{x,y,z\}} &= (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z)\\ \text{ou} &\quad (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x)\\ \text{ou} &\quad (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y)\end{aligned}$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Collage

$$\omega \text{ ordre partiel sur } X \quad \mapsto \quad \overline{\omega} \text{ variété d'ordres sur } X$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\omega}(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; \omega\restriction_{\{x,y,z\}} & = & (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z) \\ & \text{ou} & (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x) \\ & \text{ou} & (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y) \end{array}$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Collage

$\omega$ ordre partiel sur $X$ $\quad\mapsto\quad$ $\overline{\omega}$ variété d'ordres sur $X$

$$\begin{array}{lcl} \overline{\omega}(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; \omega\restriction_{\{x,y,z\}} & = & (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z) \\ & \text{ou} & (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x) \\ & \text{ou} & (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y) \end{array}$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Collage

$\omega$ ordre partiel sur $X$ $\quad\mapsto\quad$ $\overline{\omega}$ variété d'ordres sur $X$

$$
\begin{array}{lcll}
\overline{\omega}(x,y,z) \Leftrightarrow & \omega\restriction_{\{x,y,z\}} & = & (x \prec y \prec z) \text{ ou } ((x \prec y) \parallel z) \\
& & \text{ou} & (y \prec z \prec x) \text{ ou } ((y \prec z) \parallel x) \\
& & \text{ou} & (z \prec x \prec y) \text{ ou } ((z \prec x) \parallel y)
\end{array}
$$

## Proposition

$$\overline{\omega \prec \tau} = \overline{\omega \parallel \tau} = \overline{\tau \prec \omega} = \omega * \tau.$$

# Variétés d'ordres séries-parallèles

$$
\begin{array}{ll}
 & \alpha \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \exists x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha\restriction_{\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}} \neq \bigcup_{i=0}^{4} x_i x_{i+1} x_{i+3}.
\end{array}
$$

# Variétés d'ordres séries-parallèles

$\alpha$ série-parallèle

$\Leftrightarrow$ $\exists x, \alpha_x$ série-parallèle

$\Leftrightarrow$ $\forall x, \alpha_x$ série-parallèle

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha\restriction_{\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}} \neq \bigcup_{i=0}^{4} x_i x_{i+1} x_{i+3}$.

# Variétés d'ordres séries-parallèles

$$
\begin{array}{ll}
 & \alpha \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \exists x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha\restriction_{\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}} \neq \bigcup_{i=0}^{4} x_i x_{i+1} x_{i+3}.
\end{array}
$$

# Variétés d'ordres séries-parallèles

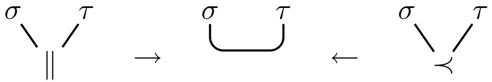
$$
\begin{array}{ll}
 & \alpha \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \exists x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\
\Leftrightarrow & \forall x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha\restriction_{\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}} \neq \bigcup_{i=0}^{4} x_i x_{i+1} x_{i+3}.
\end{array}
$$

# Variétés d'ordres séries-parallèles

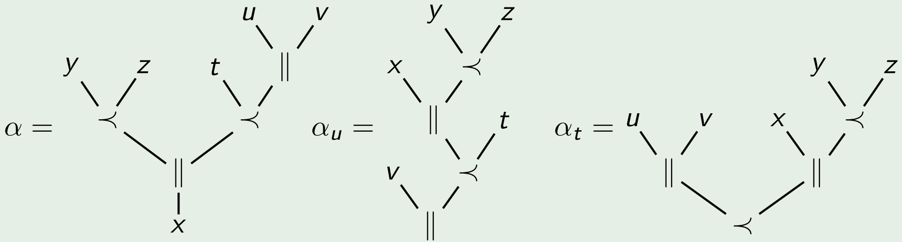
$$\begin{array}{ll} & \alpha \text{ série-parallèle} \\ \Leftrightarrow & \exists x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\ \Leftrightarrow & \forall x, \alpha_x \text{ série-parallèle} \\ \Leftrightarrow & \forall x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha\restriction_{\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}} \neq \bigcup_{i=0}^{4} x_i x_{i+1} x_{i+3}. \end{array}$$

# Variétés d'ordres séries-parallèles

$\omega \mapsto \overline{\omega}$ : on enlève la racine, arbre enraciné $\mapsto$ algue

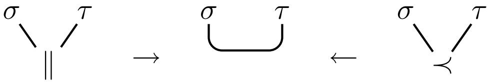



## Algue et focalisation

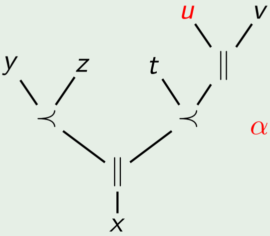


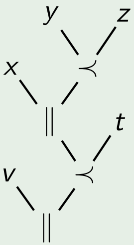
# Variétés d'ordres séries-parallèles

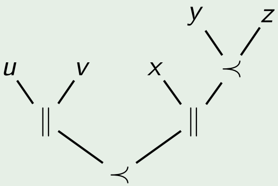
$\omega \mapsto \overline{\omega}$ : on enlève la racine, arbre enraciné $\mapsto$ algue




## Algue et focalisation

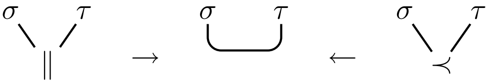
$\alpha =$ 


$\alpha_u =$ 

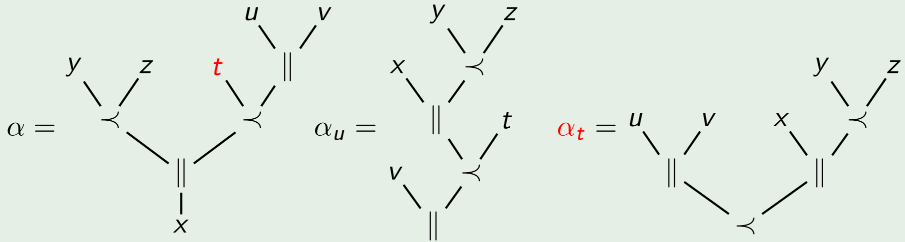

$\alpha_t =$ 

# Variétés d'ordres séries-parallèles

$\omega \mapsto \overline{\omega}$ : on enlève la racine, arbre enraciné $\mapsto$ algue




## Algue et focalisation



# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

**Théorème**

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$

$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

**Théorème**

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

## Théorème

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$

$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

## Théorème

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

**Théorème**

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

## Théorème

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

## Théorème

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{O}$

## Théorème

*L'espèce des variétés d'ordres a pour dérivée l'espèce des ordres partiels.*

$$\alpha_x * x = \alpha$$
$$(\omega * x)_x = \omega.$$

*$X, Y$ bipartition non-triviale de $\alpha \Rightarrow \exists \leqslant 1$ paire d'ordres $\omega_X, \omega_Y$ sur $X, Y$ telle que $\alpha = \omega_X * \omega_Y$. Existence pour $X$ ou $Y$ singleton.*

Preuve : focalisation $(-)_x : \mathbf{V}' \to \mathbf{O}$
collage $* : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{V}$
collage avec un point $(-) * x : \mathbf{O} \to \mathbf{V}'$.

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

**Théorème**

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x :$$

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \text{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \text{ est un ordre partiel} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \text{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \text{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \;\Leftrightarrow\; \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \; :$$

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \;\Leftrightarrow\; \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \;\Leftrightarrow\; \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$\omega \trianglelefteq \tau \quad \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau$ *et* $(\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1}$ *est un ordre partiel*

$\Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau$ *et* $\omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1}$ *est un ordre partiel.*

# Entropie

$$|\omega| = |\tau| \quad : \quad \omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega \subseteq \tau \text{ et } \overline{\omega} \subseteq \overline{\tau}.$$

## Théorème

$\alpha \subseteq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \alpha_x \trianglelefteq \beta_x$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq).$$

$$\begin{aligned} \omega \trianglelefteq \tau \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } (\tau \setminus \omega) \cup \omega^{-1} \textit{ est un ordre partiel} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \subseteq \tau \textit{ et } \omega \cup (\tau \setminus \omega)^{-1} \textit{ est un ordre partiel.} \end{aligned}$$

# Entropie

## Proposition

$\omega \subseteq \tau : \omega \ntrianglelefteq \tau \Leftrightarrow \exists x, y, z,$

$$\omega\restriction_{\{x,y,z\}} \quad = \quad \begin{tikzcd} & z \\ x & \\ & y \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

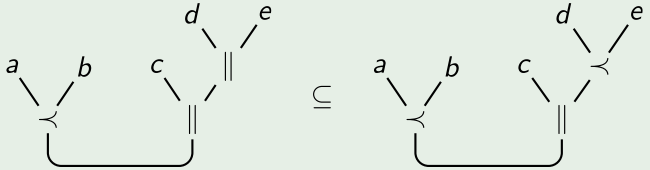
$$\tau\restriction_{\{x,y,z\}} \quad = \quad \begin{tikzcd} & z \\ x \arrow[ur] & \\ & y \arrow[uu] \end{tikzcd} \quad ou \quad \begin{tikzcd} & z \\ x & \\ & y \arrow[uu] \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad ou \quad \begin{tikzcd} & z \\ x \arrow[ur] & \\ & y \arrow[uu] \arrow[ul] \end{tikzcd} \; .$$

# Entropie

## Proposition

- $\omega, \tau$ *séries-parallèles :* $\omega \trianglelefteq \tau \Leftrightarrow \omega$ *est obtenu en remplaçant dans une représentation de* $\tau$ *des* $\prec$ *par des* $\|$.
- $\alpha, \beta$ *séries-parallèles :* $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha$ *est obtenue en remplaçant dans une représentation de* $\beta$ *des* $\prec$ *par des* $\|$.

## Exemple



# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

## Intersection de variétés d'ordres

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow \alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

## Proposition

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- $\natural\alpha$ *est la plus grande variété d'ordres* $\subseteq \alpha$.
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

**Intersection de variétés d'ordres**

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

**Proposition**

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- *$\natural\alpha$ est la plus grande variété d'ordres $\subseteq \alpha$.*
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

### Intersection de variétés d'ordres

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \rightarrow (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

### Proposition

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- *$\natural\alpha$ est la plus grande variété d'ordres $\subseteq \alpha$.*
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

**Intersection de variétés d'ordres**

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow \alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

**Proposition**

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- $\natural\alpha$ *est la plus grande variété d'ordres* $\subseteq \alpha$.
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

## Intersection de variétés d'ordres

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

## Proposition

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- $\natural\alpha$ *est la plus grande variété d'ordres* $\subseteq \alpha$.
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

## Intersection de variétés d'ordres

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

## Proposition

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- $\natural\alpha$ *est la plus grande variété d'ordres* $\subseteq \alpha$.
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

$(\mathbf{O}, \subseteq)$ et $(\mathbf{C}, \subseteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\cap$.

## Intersection de variétés d'ordres

$\alpha, \beta$ variétés d'ordres $\not\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta$ variété d'ordres. Exemple :
$xyzt \cap xytz \cap xzyt = xyt$ n'est pas une variété d'ordres sur $\{x, y, z, t\}$.

Intérieur $\natural$ : $(\mathbf{C}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\natural\alpha = \bigcap_{x \in |\alpha|} \alpha_x * x$.

## Proposition

- $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \natural\alpha \subseteq \natural\beta$.
- *$\natural\alpha$ est la plus grande variété d'ordres $\subseteq \alpha$.*
- $\natural(\natural\alpha \cap \natural\beta) = \natural(\alpha \cap \beta)$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.

Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

**Théorème**

- *$(\mathbf{V}, \subseteq)$ et $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\wedge$.*
- *$\wedge$ commute avec la focalisation $(-)_x$ et le collage $*$ :*

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

**$\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général**

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.

Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- *$(\mathbf{V}, \subseteq)$ et $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\wedge$.*
- *$\wedge$ commute avec la focalisation $(-)_x$ et le collage $*$ :*

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.

$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- $(\mathbf{V}, \subseteq)$ *et* $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ *sont des espèces semi-réticulées par* $\wedge$.
- $\wedge$ *commute avec la focalisation* $(-)_x$ *et le collage* $*$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- $(\mathbf{V}, \subseteq)$ *et* $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ *sont des espèces semi-réticulées par* $\wedge$.
- $\wedge$ *commute avec la focalisation* $(-)_x$ *et le collage* $*$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \emptyset$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- $(\mathbf{V}, \subseteq)$ *et* $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ *sont des espèces semi-réticulées par* $\wedge$.
- $\wedge$ *commute avec la focalisation* $(-)_x$ *et le collage* $*$ *:*

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- *$(\mathbf{V}, \subseteq)$ et $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ sont des espèces semi-réticulées par $\wedge$.*
- *$\wedge$ commute avec la focalisation $(-)_x$ et le collage $*$ :*

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- $(\mathbf{V}, \subseteq)$ *et* $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ *sont des espèces semi-réticulées par* $\wedge$.
- $\wedge$ *commute avec la focalisation* $(-)_x$ *et le collage* $*$ :

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.

$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Semi-treillis

Inf $\wedge$ de variétés d'ordres : $(\mathbf{V}, \subseteq) \times (\mathbf{V}, \subseteq) \to (\mathbf{V}, \subseteq)$, $\alpha \wedge \beta = \natural(\alpha \cap \beta)$.
Inf $\wedge$ d'ordres : $(\mathbf{O}, \trianglelefteq) \times (\mathbf{O}, \trianglelefteq) \to (\mathbf{O}, \trianglelefteq)$, $\omega \wedge \tau = ((\omega * x) \wedge (\tau * x))_x$.

## Théorème

- $(\mathbf{V}, \subseteq)$ *et* $(\mathbf{O}, \trianglelefteq)$ *sont des espèces semi-réticulées par* $\wedge$.
- $\wedge$ *commute avec la focalisation* $(-)_x$ *et le collage* $*$ *:*

$$(\mathbf{V}, \subseteq, \wedge)' \simeq (\mathbf{O}, \trianglelefteq, \wedge).$$

## $\omega \wedge \tau$ est strictement inclus dans $\omega \cap \tau$ en général

Exemple : $\omega = ((a \parallel b) \prec c)$, $\tau = ((a \prec c) \parallel b)$.
$\tau \subseteq \omega \Rightarrow \omega \cap \tau = \tau$ mais $\omega \wedge \tau = \varnothing$.

# Extensions cycliques

Extension cyclique d'un ordre cyclique $\alpha$ : cycle $\beta$ tel que $\alpha \subseteq \beta$.

Deux problèmes :

**C**-$\subseteq$ : Etant donné un ordre cyclique, a-t-il une extension cyclique ?
**V**-$\subseteq$ : Etant donné une variété d'ordre, a-t-elle une extension cyclique ?

# Extensions cycliques

Extension cyclique d'un ordre cyclique $\alpha$ : cycle $\beta$ tel que $\alpha \subseteq \beta$.

Deux problèmes :

**C**-$\subseteq$ : Etant donné un ordre cyclique, a-t-il une extension cyclique ?
**V**-$\subseteq$ : Etant donné une variété d'ordre, a-t-elle une extension cyclique ?

# Extensions cycliques

Extension cyclique d'un ordre cyclique $\alpha$ : cycle $\beta$ tel que $\alpha \subseteq \beta$.

Deux problèmes :

**C**-$\subseteq$ : Etant donné un ordre cyclique, a-t-il une extension cyclique ?

**V**-$\subseteq$ : Etant donné une variété d'ordre, a-t-elle une extension cyclique ?

# Extensions cycliques

Extension cyclique d'un ordre cyclique $\alpha$ : cycle $\beta$ tel que $\alpha \subseteq \beta$.

Deux problèmes :

**C**-$\subseteq$ : Etant donné un ordre cyclique, a-t-il une extension cyclique ?
**V**-$\subseteq$ : Etant donné une variété d'ordre, a-t-elle une extension cyclique ?

# Extensions cycliques

**Théorème**

**C**-$\subseteq$ *est NP-complet.*

Z. Galil and N. Megiddo.
Cyclic ordering is NP-complete.
*Theoretical Computer Science*, 5(2) :179–182, 1977.

**Théorème**

**V**-$\subseteq$ *est dans L.*

P. Ille and P. Ruet.
Cyclic extensions of order varieties.
*Under review*, 2004.

# Extensions cycliques

**Théorème**

**C**-$\subseteq$ *est NP-complet.*

Z. Galil and N. Megiddo.
Cyclic ordering is NP-complete.
*Theoretical Computer Science*, 5(2) :179–182, 1977.

**Théorème**

**V**-$\subseteq$ *est dans L.*

P. Ille and P. Ruet.
Cyclic extensions of order varieties.
*Under review*, 2004.

# Idée de la preuve (1)

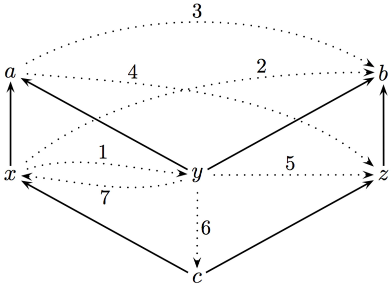
Extension entropique d'un ordre (binaire) $\omega$ : ordre total $\tau$ tel que $\omega \trianglelefteq \tau$.
**O**-$\trianglelefteq$ : Etant donné un ordre partiel, a-t-il une extension entropique ?

## Proposition

**V**-$\subseteq$ *et* **O**-$\trianglelefteq$ *sont réductibles l'un à l'autre en espace logarithmique.*

## **O**-$\trianglelefteq$ n'est pas trivial

Exemple d'ordre partiel sans extension entropique :




En pointillé : la relation de forçage.

# Idée de la preuve (1)

Extension entropique d'un ordre (binaire) $\omega$ : ordre total $\tau$ tel que $\omega \trianglelefteq \tau$.

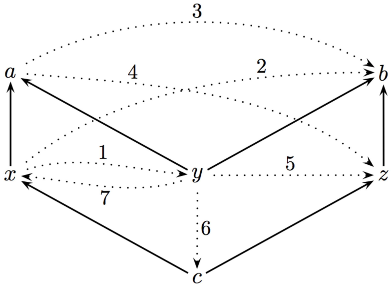
**O**-$\trianglelefteq$ : Etant donné un ordre partiel, a-t-il une extension entropique ?

## Proposition

**V**-$\subseteq$ *et* **O**-$\trianglelefteq$ *sont réductibles l'un à l'autre en espace logarithmique.*

## **O**-$\trianglelefteq$ n'est pas trivial

Exemple d'ordre partiel sans extension entropique :




En pointillé : la relation de forçage.

# Idée de la preuve (2)

## Théorème

*Décider si un graphe non-dirigé est un graphe de comparabilité* $\in SL{=}L$.


C. Àlvarez and R. Greenlaw.
A compendium of problems complete for symmetric logarithmic space.
*Computational Complexity*, 9(2) :123–145, 2000.

O. Reingold.
Undirected st-connectivity in log-space.
In *ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 376–385. ACM Press, 2005.


## Théorème

$\omega$ *a une ext. entropique* $\Leftrightarrow$ *il est de dimension* $\leqslant 2$

$\Leftrightarrow$ *ses classes de forçage sont antisymétriques*

$\Leftrightarrow$ *son graphe de cocompar. est un gr. de comparabilité.*

# Idée de la preuve (2)

**Théorème**

*Décider si un graphe non-dirigé est un graphe de comparabilité* $\in$ *SL=L.*


C. Àlvarez and R. Greenlaw.
A compendium of problems complete for symmetric logarithmic space.
*Computational Complexity*, 9(2) :123–145, 2000.

O. Reingold.
Undirected st-connectivity in log-space.
In *ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 376–385. ACM Press, 2005.


**Théorème**

$$\begin{aligned} \omega \text{ a une ext. entropique} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il est de dimension} \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{ses classes de forçage sont antisymétriques} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{son graphe de cocompar. est un gr. de comparabilité.} \end{aligned}$$

# Fin