La décomposition intervallaire des structures binaires

Pierre Ille[1]

Introduction

Généralement, pour décomposer une structure mathématique définie sur un ensemble E, on recherche une partition P de E qui est compatible avec cette structure ; c'est-à-dire, la valeur de la structure ne dépend pas du choix d'un élément à l'intérieur d'une partie de E qui appartient à P. Cette compatibilité permet alors, par contraction, par projection, ou encore, par décomposition, de définir le quotient[2] de la structure sur P.

Concernant les structures combinatoires, le plus simple est de considérer une relation d'équivalence R définie sur un ensemble E. La famille E/R des classes d'équivalence de R constitue une partition compatible avec R. Le quotient correspondant est la relation binaire[3] définie sur E/R qui est constante et égale à $-$. Déjà avec cet exemple, une difficulté fondamentale apparaît au niveau de la décomposition. En effet, si R admet au moins trois classes d'équivalence, alors pour chaque classe d'équivalence C de R, $\{C, E-C\}$ est une autre partition compatible avec R. Ainsi se pose le problème d'un choix intrinsèque d'une partition compatible si on espère aboutir à un théorème de décomposition canonique. Le second objectif est de caractériser convenablement le quotient obtenu. Bien sûr, la situation est d'autant plus délicate que la structure admet de nombreuses partitions compatibles qui, en outre, produisent des quotients difficilement distinguables. C'est précisément le cas d'une relation[4] R, définie sur un ensemble E, qui est constante et, par exemple, égale à $-$. En effet, toutes les partitions de E sont compatibles avec R et les quotients correspondants sont toujours des relations binaires, constantes et égales à $-$. On rencontre une situation analogue avec les ordres totaux. Dans ce cas, les seules partitions compatibles sont les partitions en intervalles[5] et les quotients obtenus sont encore des ordres totaux. Comme on le constatera, le théorème de décomposition est inefficace pour les relations constantes et pour les ordres totaux puisqu'il leur associe la partition compatible constituée des singletons, à laquelle correspond un quotient isomorphe à la structure initiale. Ceci nous conduit au second type de situation critique, celle d'une structure définie sur un ensemble E et qui, au contraire, admet $\{E\}$ et $\{\{x\}; x \in E\}$ comme seules partitions compatibles. Là encore, le théorème de décomposition retient $\{\{x\}; x \in E\}$ comme

[1] Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS, UMR 6206, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France ; ille@iml.univ-mrs.fr

[2] Considérons, par exemple, un groupe $(G, \star)$ et un sous-groupe distingué H de G. La famille $\{H \star x\ ;\ x \in G\}$ des classes modulo H des éléments de G forme une partition compatible avec G. Le quotient correspondant est le quotient usuel, en théorie des groupes, de G par H.

[3] Les relations binaires sont définies au début du paragraphe 2.

[4] Dans la suite de cette introduction, toutes les relations considérées sont binaires et irréflexives (§ 2).

[5] On utilise ici la notion usuelle d'intervalle d'un ordre total.

partition compatible. Ces structures sont d'ailleurs appelées indécomposables au paragraphe 4.

Le problème de décomposition des structures combinatoires binaires et finies a souvent été abordé depuis les années soixante en se restreignant à des familles spécifiques et en adoptant parfois des approches dissemblables. Le premier résultat est présenté dans l'article de T. Gallai [7, 9] où le cas des relations symétriques (§ 2)[6] est traité. Cet article constitue une référence puisque les notions fondamentales d'intervalle (§ 4) et d'intervalle élémentaire (§ 5) y sont introduites. La notion d'intervalle pour les relations est une généralisation judicieuse de la notion d'intervalle d'un ordre total. Plus précisément, considérons un ordre total T défini sur un ensemble E. Rappelons qu'une partie X de E est un intervalle de T lorsque pour chaque élément x de $E-X$, ou bien x est inférieur modulo T à tous les éléments de X ou bien x est supérieur modulo T à tous les éléments de X. En d'autres termes, T ordonne x et tous les élements de X de la même façon. Considérons, à présent, une relation symétrique R définie sur un ensemble E. Intuitivement, une partie X de E est un intervalle de R lorsque chaque élément de $E-X$ est relié *via* R à tous les éléments de $E-X$ de la même manière. Ceci permet aussi d'appréhender la notion d'intervalle pour des relations binaires qui ne sont pas nécessairement symétriques. De plus, les partitions compatibles apparaissent comme étant exactement les partitions en intervalles[7]. La notion d'intervalle élémentaire semble alors le seul renforcement possible de la notion d'intervalle qui permette à T. Gallai d'associer à chaque relation symétrique une partition compatible unique, en intervalles élémentaires[8]. Le quotient correspondant est une relation constante ou indécomposable[9]. Il est intéressant de noter que la connexité (§ 2) joue un rôle important dans ce premier théorème de décomposition. Cette démarche s'adapte aisément à des relations quelconques. En plus de la connexité, on doit considérer la forte connexité (§ 2), et, dans le théorème de décomposition, on ajoute les ordres totaux aux relations constantes ou indécomposables. Le théorème de décomposition peut alors s'énoncer comme suit : à un quotient près, une relation est soit indécomposable soit constante soit un ordre total. Comme il a été indiqué, le théorème de décomposition reste inactif sur ces trois types de relations. Ceci découle de l'unicité de la décomposition qu'il assure.

---

[6] En fait, T. Gallai considère les graphes non orientés qui sont comparables, pour la décomposition, aux relations binaires, irréflexives et symétriques.

[7] Les partitions compatibles sont appelées partitions intervallaires au paragraphe 4.

[8] Cette unique partition compatible est appelée partition élémentaire au paragraphe 6.

[9] T. Gallai interprète aussi ce théorème de décomposition à l'aide de la notion de forçage entre paires d'éléments qui sont reliés par la relation symétrique considérée. Ceci lui permet de caractériser les relations symétriques qui admettent au moins une orientation transitive, puis de dénombrer ces orientations. Étant donnée une relation symétrique R, définie sur un ensemble E, rappelons qu'une *orientation transitive* de R est un ordre partiel O (§ 2), défini sur E, tel que pour tous $x, y \in E$, si $R(x, y) = +$, alors $O(x, y) = +$ ou $O(y, x) = +$. De plus, cette notion de forçage s'est avérée féconde en algorithmique pour reconnaître les relations symétriques qui admettent une orientation transitive. Certaines de ses variantes, considérées pour d'autres types de structures, ont été indispensables à l'élaboration d'algorithmes efficaces de reconnaissance de l'indécomposabilité.

Les notions d'intervalle et d'intervalle élémentaire peuvent de nouveau s'étendre à des structures combinatoires encore plus générales : les structures binaires[10] introduites au paragraphe 3. De plus, les relations indécomposables, les relations constantes et les ordres totaux s'interprètent facilement en termes de structures binaires, respectivement en structures binaires indécomposables (§ 4), en structures binaires constantes (§ 3) et en structures binaires totalement ordonnées (§ 3). Pour les structures binaires, le théorème de décomposition s'énonce alors de la manière suivante : à un quotient près, une structure binaire est constante, totalement ordonnée ou indécomposable. Au paragraphe 6, nous présentons une preuve de ce théorème qui repose essentiellement sur les propriétés ensemblistes des intervalles, sans faire référence à une quelconque notion de connexité. Intuitivement, ce théorème signifie que « presque toutes » les structures binaires sont indécomposables. Ainsi, l'étude de la décomposabilité débouche naturellement sur l'unique difficulté sous-jacente qui est centrale : l'étude structurelle interne de l'indécomposabilité. La principale utilisation de ce théorème est de prouver par récurrence certaines propriétés. Disons qu'une propriété Π est *ascendante*, pour la décomposition, lorsque pour toute structure binaire B et pour toute partition P compatible avec B, si Π est satisfaite par le quotient de B par P et si Π est satisfaite par chaque sous-structure de B définie sur un élément de P, alors B vérifie Π. Par conséquent, pour établir qu'une propriété ascendante Π est vérifiée par toutes les structures binaires, en raisonnant par récurrence sur le cardinal de leur base et en utilisant le théorème de décomposition généralisé, il suffit de s'assurer que Π est satisfaite par les structures binaires constantes, totalement ordonnées ou indécomposables. Encore une fois, la difficulté réside au niveau des structures binaires indécomposables. On tente alors souvent d'effectuer une récurrence à l'intérieur des structures binaires indécomposables. Là encore, une connaissance intrinsèque conséquente de l'indécomposabilité est requise.

Depuis ces dix dernières années, l'étude de l'indécomposabilité s'est considérablement développée et nous concluons, à la fin du paragraphe 7, avec les premiers résultats sur les structures binaires indécomposables. Au début de ce paragraphe, nous présentons les différents types de connexité des structures binaires qui généralisent la connexité et la forte connexité. Ils permettent, non seulement, d'obtenir les « petites » sous-structures binaires indécomposables d'une structure binaire indécomposable, mais aussi, d'interpréter le théorème de décomposition généralisé en termes de connexité.

Position du problème dans deux cas simples

Étant donné un ensemble fini et non vide E, une relation binaire de base E est une application de $E \times E$ dans $\{-,+\}$. La base d'une relation binaire R est notée $\underline{R}$. Une relation binaire R est *irréflexive* lorsque pour tout $x \in \underline{R}$, $R(x,x) = -$. Dans la suite, nous considérerons uniquement des relations binaires irréflexives. Par exemple, une relation binaire R est *vide* si pour tous $x, y \in \underline{R}$, $R(x,y) = -$. Par contre, une relation binaire R est *complète* lorsque pour tous $x \neq y \in \underline{R}$,

[10] Concernant les problèmes de décomposition, les structures binaires sont comparables aux 2-structures étiquetées [4]. Elles permettent de généraliser les differents types de structures abordés dans ce domaine, comme les relations, les graphes orientés, les multirelations (binaires), les graphes orientés étiquetés...

$R(x,y)=+$. Étant donnée une relation binaire R. Le *complémentaire* de R est la relation binaire, notée R^c, de même base que R et telle que pour tous $x \neq y \in \underline{R}$, $R^c(x,y) \neq R(x,y)$. Le *dual* de R est la relation binaire, notée R^d, de même base que R et telle que pour tous $x, y \in \underline{R}$, $R^d(x,y) = R(y,x)$.

À présent, rappelons les notions usuelles d'antisymétrie, de symétrie et de transitivité. Soit R une relation binaire.

– R est *antisymétrique* lorsque pour tous $x, y \in \underline{R}$, $R(x,y)=+$ entraîne que $R(y,x) = -$.

– R est *symétrique* si pour tous $x, y \in \underline{R}$, $R(x,y) = R(y,x)$.

– R est *transitive* lorsque pour tous les éléments distincts x, y, z de $\underline{R}$, si $R(x,y) = R(y,z) = +$, alors $R(x,z) = +$.

Ainsi, une *relation d'équivalence* (stricte à cause de l'irréflexivité) est une relation binaire symétrique et transitive. Par contre, une relation binaire antisymétrique et transitive est un *ordre partiel* (strict). Par ailleurs, une relation binaire R est un *tournoi* lorsque pour tous $x \neq y \in \underline{R}$, $R(x,y) \neq R(y,x)$. En particulier, un *ordre total* est un ordre partiel et un tournoi.

Les notions suivantes de connexité et de forte connexité proviennent de la théorie des graphes. Associons à chaque relation binaire R les deux relations d'équivalence suivantes $\mathcal{C}(R)$ et $\mathcal{F}(R)$ de même base que R.

– Pour tous $x \neq y \in \underline{R}$, $\mathcal{C}(R)(x,y) = +$ s'il existe une suite $x_0, \ldots, x_m$ d'éléments de $\underline{R}$ telle que $x_0 = x$, $x_m = y$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, $R(x_i, x_{i+1}) = +$ ou $R(x_{i+1}, x_i) = +$.

– Pour tous $x \neq y \in \underline{R}$, $\mathcal{F}(R)(x,y) = +$ lorsqu'il existe deux suites $x_0, \ldots, x_m$ et $y_0, \ldots, y_n$ d'éléments de $\underline{R}$ vérifiant :

(1) $x_0 = x$, $x_m = y$, $y_0 = y$ et $y_n = x$;
(2) pour tout $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, $R(x_i, x_{i+1}) = +$;
(3) pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $R(y_j, y_{j+1}) = +$.

Les classes d'équivalence de $\mathcal{C}(R)$ (resp. $\mathcal{F}(R)$) sont appelées *composantes connexes* (resp. *composantes fortement connexes*) de R. Une relation binaire est alors *connexe* (resp. *fortement connexe*) lorsqu'elle admet une seule composante connexe (resp. fortement connexe).

Considérons une relation binaire R qui n'est pas connexe. Par définition de $\mathcal{C}(R)$, si X et Y sont des composantes connexes distinctes de R, alors pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $R(x,y) = R(y,x) = -$. Par suite, en décomposant R suivant la famille $\underline{R}\ /\mathcal{C}(R)$ de ses composantes connexes, on obtient la relation binaire vide de base $\underline{R}\ /\mathcal{C}(R)$. De même, si le complémentaire R^c d'une relation binaire R n'est pas connexe, alors, en considérant les composantes connexes de R^c, on peut décomposer R en une relation binaire complète. Le problème est donc de décomposer une relation binaire connexe dont le complémentaire est aussi connexe. On aboutit à une situation analogue lorsqu'on envisage la forte connexité des tournois. Tout d'abord, traitons le cas d'un tournoi T qui n'est pas fortement connexe.

– Étant données des composantes fortement connexes distinctes X et Y de T. Montrons que pour tous $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$, $T(x,y) = T(x',y')$. Comme T est un tournoi, il s'ensuivra que $T(y,x) = T(y',x')$. Supposons, au contraire, qu'il existe $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$ tels que $T(x,y) = +$ et $T(x',y') = -$.

Puisque $\mathcal{F}(T)(x,x') = +$, il existe une suite $x_0,\dots,x_m$ d'éléments de $\underline{T}$ telle que $x_0 = x'$, $x_m = x$ et pour tout $i \in \{0,\dots,m-1\}$, $T(x_i,x_{i+1}) = +$. De même, comme $\mathcal{F}(T)(y,y') = +$, il existe une suite $y_0,\dots,y_n$ d'éléments de $\underline{T}$ telle que $y_0 = y$, $y_n = y'$ et pour tout $j \in \{0,\dots,n-1\}$, $T(y_j,y_{j+1}) = +$. Enfin, T étant un tournoi, $T(y',x') = +$. Ainsi, en considérant les suites x, y et $y = y_0,\dots,y_n = y', x' = x_0,\dots,x_m = x$, on obtiendrait que $\mathcal{F}(T)(x,y) = +$ et, donc, que $X = Y$.

– Notons F la famille des composantes fortement connexes de T. Ce qui précède permet de définir un tournoi T/F de base F de la façon suivante. Pour tous $X \neq Y \in F$, $(T/F)(X,Y) = T(x,y)$, où $x \in X$ et $y \in Y$. Montrons, à présent, que T/F est un ordre total. Comme T/F est un tournoi, il suffit de vérifier qu'il est transitif. Supposons, par l'absurde, qu'il existe des éléments distincts X, Y, Z de F tels que $(T/F)(X,Y) = (T/F)(Y,Z) = +$ et $(T/F)(X,Z) = -$. Soient $x \in X$, $y \in Y$ et $z \in Z$. Par définition de T/F, $T(x,y) = T(y,z) = +$, $T(x,z) = -$ et, donc, $T(z,x) = +$. Par suite, en considérant les suites x, y et y, z, x, on obtiendrait que $\mathcal{F}(T)(x,y) = +$.

Par conséquent, si un tournoi n'est pas fortement connexe, alors, en considérant ses composantes fortement connexes, on peut le décomposer en un ordre total. Comme précédemment, se pose la question d'une éventuelle décomposition d'un tournoi fortement connexe. Dans la suite de cet exposé, nous présenterons un procédé de décomposition adéquat des relations binaires et, plus généralement, des structures binaires.

Les structures binaires

Considérons un ensemble fini et non vide E et un entier $k > 0$. Une *structure binaire*[11] de *base* E et de *rang* k est une application de $(E \times E) - \{(x,x); x \in E\}$ dans $\{0,\dots,k-1\}$. La base d'une structure binaire B est notée $\underline{B}$ et son rang est noté $\mathrm{rg}(B)$. À chaque partie non vide X de $\underline{B}$ est associée la *sous-structure binaire* $B(X)$ de B de base X et de même rang que B, qui est la restriction de B à $(X \times X) - \{(x,x); x \in X\}$. Par ailleurs, étant données des structures binaires B et C de même rang, un *isomorphisme*[12] de B sur C est une bijection f de $\underline{B}$ sur $\underline{C}$ telle que pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, $B(x,y) = C(f(x),f(y))$. Disons alors que deux structures binaires sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'une vers l'autre. Enfin, une structure binaire B est *constante* s'il existe $i \in \{0,\dots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ tel que pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, $B(x,y) = i$. Disons alors que B est *constante* et *égale* à i.

À chaque relation binaire R est associée la structure binaire B de même base que R, de rang 2 et qui vérifie[13] : pour tous $x \neq y \in \underline{R}$, $B(x,y) = 1$ si et seulement

[11] Une structure binaire peut être aussi considérée comme une *2-structure étiquetée* [4].

[12] Les notions d'isomorphie entre structures binaires et entre 2-structures étiquetées diffèrent.

[13] On pourrait aussi définir une structure binaire B de base E et de rang k comme étant une application de $E \times E$ dans $\{0,\dots,k-1\}$, en imposant de plus que pour tout $x \in E$, $B(x,x) = 0$. Mais, notre définition permet en outre de considérer simplement les graphes orientés comme des structures binaires de rang 2, et vice versa. Rappelons qu'un graphe orienté G est un couple (S,A), où S est un ensemble, fini et non vide, de *sommets* de G et A est une famille de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de G. Ainsi, à un graphe $G = (S,A)$ est associée la structure binaire de base S, de rang 2 et qui vaut 1 exactement sur les arêtes de G.

si $R(x,y) = +$. Dans la suite, on identifiera les relations binaires et les structures binaires de rang 2. Par exemple, une relation binaire vide sera considérée comme une structure binaire de rang 2, constante et égale à 0. Ou encore, l'inclusion stricte entre les parties d'un ensemble E est la structure binaire, notée $\subset$, de base, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, de rang 2 et qui est définie par : pour tous $X \neq Y \in \mathcal{P}(E)$, $\subset (X,Y) = 1$ si $X \subset Y$.

Étant donné un ordre partiel O, une partie non vide X de $\underline{O}$ est *totalement ordonnée* par O si la sous-structure $O(X)$ est un ordre total. Par ailleurs, une structure binaire B est *totalement ordonnée* lorsqu'il existe un ordre total T, de même base que B, et des éléments distincts i et j de $\{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ tels que $B^{-1}(\{i\}) = T^{-1}(\{0\})$ et $B^{-1}(\{j\}) = T^{-1}(\{1\})$. On dit alors que B est totalement ordonnée par T. Plus simplement, une structure binaire B est totalement ordonnée par un élément i de $\{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ (voir la figure 1 qui représente une structure binaire B de base $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, de rang 3 et qui est définie par : $B(\alpha,\beta) = B(\alpha,\gamma) = B(\beta,\gamma) = 1$ et $B(\gamma,\alpha) = B(\gamma,\beta) = B(\beta,\alpha) = 2$) lorsqu'il existe $j \in \{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\} - \{i\}$ tel que pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, $B(x,y) \in \{i,j\}$ et lorsque la structure binaire T, de même base que B, de rang 2 et telle que $B^{-1}(\{i\}) = T^{-1}(\{0\})$ et $B^{-1}(\{j\}) = T^{-1}(\{1\})$, est un ordre total. Dans ce cas, on remarque que B est aussi totalement ordonnée par j en considérant le dual T^d de T au lieu de T.

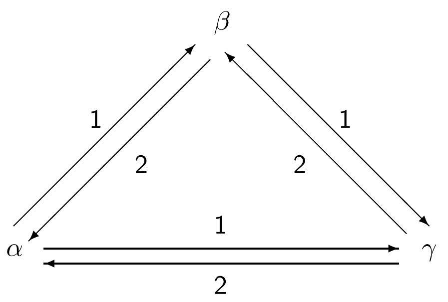

FIG. 1. une structure binaire totalement ordonnée par 1

L'intervalle et le quotient

Étant donné un ordre total T, rappelons qu'un intervalle de T est une partie X de $\underline{T}$ telle que pour tout $x \in \underline{T} - X$, on a : ou bien pour tout $y \in X$, $T(x,y) = 0$ et $T(y,x) = 1$ ou bien pour tout $y \in X$, $T(x,y) = 1$ et $T(y,x) = 0$. Cette notion se généralise aux structures binaires de la manière suivante. Soit B une structure binaire, une partie X de $\underline{B}$ est un *intervalle* [3, 6] (ou un ensemble *autonome* [7, 9] ou un *clan* [4, 5] ou un ensemble *homogène* [2] ou un *module* [11] ou un sous-ensemble *partitif* [12]) de B lorsque pout tout $x \in \underline{B} - X$, il existe $i,j \in \{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ tels que pour tout $y \in X$, $B(x,y) = i$ et $B(y,x) = j$.

De façon équivalente, une partie X de $\underline{B}$ est un intervalle de B si pour tous $x \in \underline{B} - X$ et $y, z \in X$, $B(x, y) = B(x, z)$ et $B(y, x) = B(z, x)$. Par exemple, si B est totalement ordonnée par un ordre total T, alors B et T ont les mêmes intervalles, c'est-à-dire, les intervalles au sens usuel de T. Par contre, si B est constante, alors toutes les parties de $\underline{B}$ sont des intervalles de B. Tout d'abord, remarquons que les propriétés des intervalles dans le cas général sont les mêmes que celles des intervalles d'un ordre total.

Proposition 1. — *Considérons une structure binaire B.*

(1) *La base $\underline{B}$, $\varnothing$ et $\{x\}$, où $x \in \underline{B}$, sont des intervalles de B.*

(2) *Étant donnés des intervalles X et Y de B.*

- *$X \cap Y$ est un intervalle de B.*
- *Si $X \cap Y \neq \varnothing$, alors $X \cup Y$ est un intervalle de B.*
- *Si $X - Y \neq \varnothing$, alors $Y - X$ est un intervalle de B.*

(3) *Si X et Y sont des intervalles disjoints de B, alors il existe $i \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tel que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $B(x, y) = i$.*

Preuve. La première assertion étant facile à vérifier, considérons des intervalles X et Y de B.

Soit $x \in \underline{B} - (X \cap Y)$, supposons, par exemple, que $x \notin X$. Puisque X est un intervalle de B, il existe $i, j \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que pour tout $y \in X$, $B(x, y) = i$ et $B(y, x) = j$. Il en sera donc de même pour tout $y \in X \cap Y$.

Supposons que $X \cap Y \neq \varnothing$ et considérons $x \in \underline{B} - (X \cup Y)$. Comme X est un intervalle de B, il existe $i, j \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que tout $y \in X$, $B(x, y) = i$ et $B(y, x) = j$. De même, Y étant un intervalle de B, il existe $i', j' \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que tout $y \in Y$, $B(x, y) = i'$ et $B(y, x) = j'$. En considérant pour y un élément de $X \cap Y$, on obtient : $i = i'$ et $j = j'$. Ainsi, pour tout $z \in X \cup Y$, $B(x, z) = i$ et $B(z, x) = j$.

Supposons que $X - Y \neq \varnothing$ et considérons $x \in \underline{B} - (Y - X)$. Comme Y est un intervalle de B, pour tout $z \in \underline{B} - Y$, il existe $i_z, j_z \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que pour tout $y \in Y$, $B(z, y) = i_z$ et $B(y, z) = j_z$. Par suite, si $x \notin Y$, alors pour tout $y \in Y - X$, $B(x, y) = i_x$ et $B(y, x) = j_x$. Supposons donc que $x \in X \cap Y$ et considérons $\alpha \in X - Y$. Puisque X est un intervalle de B, pour tout $y \in \underline{B} - X$, $B(y, x) = B(y, \alpha)$ et $B(x, y) = B(\alpha, y)$. En particulier, pour tout $y \in Y - X$, $B(x, y) = B(\alpha, y) = i_\alpha$ et $B(y, x) = B(y, \alpha) = j_\alpha$.

Finalement, supposons que $X \cap Y = \varnothing$ et considérons $u \in X$ et $v \in Y$. Pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, comme X est un intervalle de B, $B(x, y) = B(u, y)$. Puisque Y est un intervalle de B, $B(u, y) = B(u, v)$. Par conséquent, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $B(x, y) = B(u, v)$. □

Soit B une structure binaire, suite à la première assertion de cette proposition, les ensembles $\underline{B}$, $\varnothing$ et $\{x\}$, où $x \in \underline{B}$, sont appelés *intervalles triviaux*. Une structure binaire est alors *indécomposable* [3, 6] (ou *première* [2] ou *primitive* [4, 5], voir la figure 2) lorsque tous ses intervalles sont triviaux ; sinon, elle est *décomposable* (voir la figure 3).

La dernière assertion de la proposition précédente permet de définir le quotient d'une structure binaire de la manière suivante. Étant donnée une structure binaire B, une partition P de $\underline{B}$ est une *partition intervallaire* de B si tous ses éléments

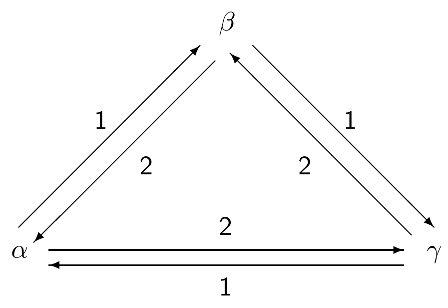

Fig. 2. une structure binaire indécomposable.

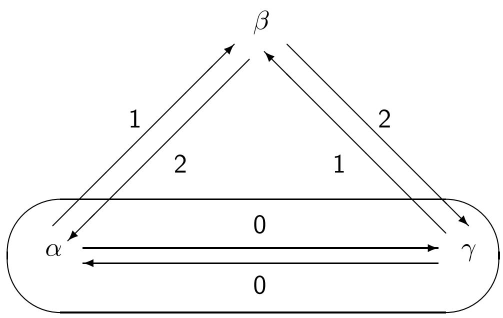

Fig. 3. une structure binaire décomposable admettant $\{\alpha, \gamma\}$ comme seul intervalle non trivial.

sont des intervalles de B. À une telle partition P est associé le *quotient* B/P de B par P, de base P et de même rang que B, définit comme suit. Pour tous $X \neq Y \in P$, il découle de la proposition 1.3 que pour tous $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$, $B(x, y) = B(x', y')$. Ainsi, $(B/P)(X, Y) = B(x, y)$, où $x \in X$ et $y \in Y$, est bien défini. Il s'ensuit que si f est une application de P dans $\underline{B}$, telle que pour tout $X \in P$, $f(X) \in X$, alors f est un isomorphisme du quotient B/P sur la sous-structure $B(f(P))$. Par exemple, $\{\underline{B}\}$ et $\{\{x\}; x \in \underline{B}\}$ sont des partitions intervallaires de $\underline{B}$, appelées *partitions intervallaires triviales*. Par suite, une structure binaire est décomposable si et seulement si elle admet une partition intervallaire non triviale. Comme le montre le résultat suivant, les notions d'intervalle et de quotient sont compatibles.

Proposition 2. — *Considérons une partition intervallaire P d'une structure binaire B.*

(1) *Si I est un intervalle de B, alors $I/P = \{X \in P : I \cap X \neq \varnothing\}$ est un intervalle de B/P.*

(2) *Si Q est un intervalle de B/P, alors la réunion $\cup Q$ des éléments de Q est un intervalle de B.*

Preuve. Soit I un intervalle de B, considérons $X \in P - (I/P)$ et $x \in X$. Puisque I est un intervalle de B, il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tel que pour tout $y \in I$, $B(x, y) = i$ et $B(y, x) = j$. Étant donné $Y \in I/P$, en considérant $y \in I \cap Y$, on obtient : $(B/P)(X, Y) = B(x, y) = i$ et $(B/P)(Y, X) = B(y, x) = j$. De plus, comme $\mathrm{rg}(B/P) = \mathrm{rg}(B)$, $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B/P) - 1\}$.

Soit Q un intervalle de B/P, considérons $x \in \underline{B} - (\cup Q)$ et notons X l'élément de P qui contient x. Comme Q est un intervalle de B/P et comme $X \notin Q$, il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B/P) - 1\}$ tels que pour tout $Y \in Q$, $B(X, Y) = i$ et $B(Y, X) = j$. Ainsi, pour tout $y \in \cup Q$, en notant Y l'élément de Q qui contient y, on a : $B(x, y) = B(X, Y) = i$ et $B(y, x) = B(Y, X) = j$. Enfin, comme $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B/P)$, $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$. □

L'intervalle élémentaire

Étant donnée une relation d'équivalence R. Si C est une classe d'équivalence de R, alors pour tous $x \neq y \in C$, $R(x, y) = 1$, et pour tous $x \in C$ et $y \in \underline{R} - C$, $R(x, y) = R(y, x) = 0$. Supposons qu'il existe un intervalle X de R tel que $X \cap C$, $X - C$ et $C - X$ ne sont pas vides. Soit $\alpha \in X - C$, comme X est un intervalle de R, pour tous $x \in C - X$ et $y \in C \cap X$, on aurait que $R(x, y) = R(x, \alpha) = 0$. Ainsi, pour tout intervalle X de R, si $X \cap C \neq \varnothing$, alors $X \subseteq C$ ou $C \subseteq X$. Autrement dit, tout intervalle de R, qui n'est pas inclus dans une classe d'équivalence de R, est une réunion de classes d'équivalence de R.

Plus généralement, considérons une structure binaire B. Un intervalle X de B est *élémentaire* [7, 9] lorsque pour tout intervalle Y de B, si $X \cap Y \neq \varnothing$, alors $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Par exemple, tous les intervalles triviaux sont élémentaires. Comme le montre le résultat suivant, pour certaines structures binaires, ce sont les seuls.

Lemme 1. — *Tous les intervalles élémentaires d'une structure binaire constante, totalement ordonnée ou indécomposable sont triviaux.*

Preuve. Les intervalles d'une structure binaire indécomposable étant triviaux, il en est de même de ses intervalles élémentaires. Par contre, si B est une structure binaire constante, alors toutes les parties de $\underline{B}$ sont des intervalles de B. Or, si X est une partie de $\underline{B}$ telle que $1 < |X| < |\underline{B}|$, alors pour $x \in X$ et $y \in \underline{B} - X$, $\{x, y\}$ est un intervalle de B tel que $X \cap \{x, y\}$, $X - \{x, y\}$ et $\{x, y\} - X$ ne sont pas vides. Enfin, considérons une structure binaire B totalement ordonnée par un ordre total T. Comme B et T ont les mêmes intervalles, ils ont les mêmes intervalles élémentaires. Pour toute partie non vide U de $\underline{T}$, notons $\min(U)$ le plus petit élément de U modulo T et $\max(U)$ le plus grand élément de U modulo T. De plus, pour tous $x, y \in \underline{T}$, avec $T(x, y) = 1$, notons $[x, y]$ le plus petit intervalle de T qui contient x et y. Considérons alors un intervalle élémentaire X de T tel que $|X| > 1$. Puisque $\min(X) \in X \cap [\min(\underline{T}), \min(X)]$ et puisque $\max(X) \in X - [\min(\underline{T}), \min(X)]$, $[\min(\underline{T}), \min(X)] \subseteq X$. De même, $[\max(X), \max(\underline{T})] \subseteq X$ et, donc, $X = \underline{T}$. □

La proposition suivante précise la compatibilité entre les notions d'intervalle élémentaire et de quotient.

Proposition 3. — *Étant donnée une partition intervallaire P d'une structure binaire B.*

(1) *Si I est un intervalle élémentaire de B, alors $I/P = \{X \in P : I \cap X \neq \varnothing\}$ est un intervalle élémentaire de B/P.*

(2) *Si Q est un intervalle élémentaire de B/P et si tous les éléments de P sont des intervalles élémentaires de B, alors la réunion $\cup Q$ des éléments de Q est un intervalle élémentaire de B.*

Dans la seconde assertion de cette proposition, remarquons qu'il est nécessaire de supposer que tous les éléments de P soient des intervalles élémentaires de B. En effet, pour tout $X \in P$, puisque $\{X\}$ est un intervalle élémentaire de B/P, on obtient que $\cup\{X\} = X$ est un intervalle élémentaire de B.

Preuve de la proposition 3. Soit I un intervalle élémentaire de B, considérons un intervalle Q de B/P tel que $Q \cap (I/P) \neq \varnothing$. Étant donné $X \in Q \cap (I/P)$: comme $X \in I/P$, il existe $x \in I \cap X$ et, comme $X \in Q$, $x \in I \cap (\cup Q)$. Par la proposition 2, $\cup Q$ est un intervalle de B et, puisque I est un intervalle élémentaire de B, $I \subseteq \cup Q$ ou $\cup Q \subseteq I$. Il s'ensuit que $I/P \subseteq (\cup Q)/P$ ou $(\cup Q)/P \subseteq I/P$; or, $(\cup Q)/P = Q$.

Soit Q un intervalle élémentaire de B/P, considérons un intervalle I de B tel que $I \cap (\cup Q) \neq \varnothing$. Soit $x \in I \cap (\cup Q)$: notons X l'élément de P qui contient x. Comme $x \in \cup Q$, $X \in Q$ et, comme $x \in I \cap X$, $X \in I/P$. Ainsi, $X \in (I/P) \cap Q$. Par la proposition 2, I/P est un intervalle de B/P et, puisque Q est un intervalle élémentaire de B/P, $I/P \subseteq Q$ ou $Q \subseteq I/P$. Si $I/P \subseteq Q$, alors $I \subseteq \cup(I/P) \subseteq \cup Q$. Supposons donc que $Q \subseteq I/P$, ce qui entraîne que $\cup Q \subseteq \cup(I/P)$. Remarquons, tout d'abord, que si $|Q| \leqslant 1$, alors ou bien $Q = \varnothing$ et $\cup Q = \varnothing$ ou bien $|Q| = 1$ et $\cup Q \in P$. Dans les deux cas, $\cup Q$ est un intervalle élémentaire de B. Par suite, on peut supposer, en outre, que $|Q| \geqslant 2$. Pour tout $Y \in I/P$, $I \cap Y \neq \varnothing$ et, puisque $|I/P| \geqslant 2$, $I - Y \neq \varnothing$. Comme Y est un intervalle élémentaire de B, $Y \subseteq I$. Ainsi, $\cup(I/P) = I$ et $\cup Q \subseteq I$. $\square$

Le théorème de décomposition

Afin de se ramener par un quotient à une structure binaire, dont tous les intervalles élémentaires sont triviaux, on considère une partition intervallaire spécifique. À chaque structure binaire B, telle que $|\underline{B}| > 1$, est associée la famille $P(B)$ des ensembles maximaux pour l'inclusion parmi les intervalles élémentaires de B distincts de $\underline{B}$. Ainsi, pour tout $X \in P(B)$, X est un intervalle élémentaire de B tel que pour tout intervalle élémentaire Y de B, si $X \subset Y$, alors $Y = \underline{B}$.

Lemme 2. — *Pour toute structure binaire B telle que $|\underline{B}| > 1$, $P(B)$ constitue une partition intervallaire de B.*

Preuve. Il suffit de vérifier que P est une partition de $\underline{B}$. Soit $x \in \underline{B}$: puisque $\{x\}$ est un intervalle élémentaire de B qui est distinct de $\underline{B}$, il existe, par définition de $P(B)$, un élément X de $P(B)$ tel que $\{x\} \subseteq X$. Par ailleurs, considérons des éléments X et Y de $P(B)$ tels que $X \cap Y \neq \varnothing$. Comme X est un intervalle élémentaire de B, $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Par maximalité des éléments de $P(B)$, $X = Y$. □

Étant donnée une structure binaire B, la famille $P(B)$ est appelée *partition élémentaire* associée à B. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 3.

Corollaire 1. — *Soit B une structure binaire telle que $|\underline{B}| > 1$, tous les intervalles élémentaires du quotient $B/P(B)$ sont triviaux.*

Preuve. Considérons un intervalle élémentaire Q de $B/P(B)$ tel que $|Q| > 1$. Par la proposition 3, $\cup Q$ est un intervalle élémentaire de B. Or, pour tout $X \in Q$, $X \subset \cup Q$ car $|Q| > 1$. Par maximalité des éléments de $P(B)$, $\cup Q = \underline{B}$, ou encore, $Q = P(B)$ □

On en déduit la caractérisation suivante des partitions élémentaires.

Corollaire 2. — *Considérons une partition intervallaire P d'une structure binaire B, telle que $|P| > 1$. Si tous les éléments de P sont des intervalles élémentaires de B et si le quotient B/P est constant, totalement ordonné ou indécomposable, alors $P = P(B)$.*

Preuve. Par définition de $P(B)$, il suffit de montrer que pour tout $X \in P$, si I est un intervalle élémentaire de B tel que $X \subset I$, alors $I = \underline{B}$. Par la proposition 3, $I/P = \{Y \in P : I \cap Y \neq \varnothing\}$ est un intervalle élémentaire de B/P. Il découle alors du lemme 1 que I/P est trivial. De plus, comme $X \subset I$, $|I/P| > 1$ et, donc, $I/P = P$. Pour tout $Y \in P$, puisque Y est un intervalle élémentaire de B tel que $Y \cap I \neq \varnothing$, $I \subseteq Y$ ou $Y \subseteq I$. Finalement, comme $X \subset I$, $Y \subset I$ et, par conséquent, $I = \underline{B}$. □

Nous sommes donc amenés à étudier les structures binaires dont tous les intervalles élémentaires sont triviaux. Nous utiliserons le lemme 1 et la définition suivante. Soit B une structure binaire. De même que pour les ordres totaux, une partie X de $\underline{B}$ est une *section* de B lorsque X et $\underline{B} - X$ sont des intervalles de B. Par exemple, $\varnothing$ et $\underline{B}$ sont des sections de B, appelées *sections triviales*.

Théorème 1 [1, 4]. — *Les structures binaires, dont tous les intervalles élémentaires sont triviaux, sont exactement les structures binaires constantes, totalement ordonnées ou indécomposables.*

Preuve. Par le lemme 1, il suffit de montrer que pour toute structure binaire décomposable B, si tous les intervalles élémentaires de B sont triviaux, alors B est constante ou totalement ordonnée. Comme B est décomposable, on peut considérer un intervalle non trivial X de B qui est maximal pour l'inclusion. Par hypothèse, X n'est pas élémentaire. Il existe donc un intervalle Y de B tel que $X \cap Y$, $X - Y$ et $Y - X$ ne sont pas vides. Par la proposition 1, puisque $X \cap Y \neq \varnothing$, $X \cup Y$ est un intervalle de B. Comme $Y - X \neq \varnothing$, $X \subset X \cup Y$ et, par maximalité de X,

$X \cup Y = \underline{B}$. De plus, par la proposition 1, comme $X - Y \neq \varnothing$, $Y - X = \underline{B} - X$ est un intervalle de B. Par conséquent, X est une section non triviale de B.

À présent, notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles de sections de B qui sont totalement ordonnées par l'inclusion. Considérons alors un élément S de $\mathcal{S}$ qui est maximal pour l'inclusion. Remarquons, d'ores et déjà, que $\overline{S} = \{\underline{B}-s; s \in S\}$ est aussi un élément de $\mathcal{S}$ qui est maximal pour l'inclusion. Comme X est une section non triviale de B, $|S| \geqslant 3$. Il existe donc un entier $n \geqslant 3$ tel que $S = \{s_m; 0 \leqslant m \leqslant n-1\}$, où $s_0 = \varnothing$, $s_{n-1} = \underline{B}$ et pour $m \in \{0, \ldots, n-2\}$, $s_m \subset s_{m+1}$. Pour $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, posons $X_m = s_m - s_{m-1}$. Soit $m \in \{1, \ldots n-1\}$: par la proposition 1, $X_m = s_m \cap (\underline{B} - s_{m-1})$ est un intervalle de B. Montrons de plus que X_m est un intervalle élémentaire de B. Sinon, il existerait un intervalle Y de B tel que $X_m \cap Y$, $X_m - Y$ et $Y - X_m$ ne sont pas vides. Quitte à échanger S et $\overline{S}$, on peut supposer que $Y \cap s_{m-1} \neq \varnothing$. Par la proposition 1, $Y \cap s_m$ est un intervalle de B et, puisque $(Y \cap s_m) \cap s_{m-1} = Y \cap s_{m-1}$ n'est pas vide, $s = (Y \cap s_m) \cup s_{m-1}$ est un intervalle de B. De plus, comme $\underline{B} - s_{m-1}$ est un intervalle de B tel que $s - (\underline{B} - s_{m-1}) = s_{m-1}$ n'est pas vide, $(\underline{B} - s_{m-1}) - s = \underline{B} - s$ est un intervalle de B. Ainsi, s est une section de B telle que $s_{m-1} \subset s \subset s_m$; ce qui contredit la maximalité de S. Par conséquent, pour tout $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, X_m est un intervalle élémentaire de B. Puisque $n \geqslant 3$, $X_m \neq \underline{B}$ et, par hypothèse, X_m contient un seul élément noté x_m. Par suite, $\underline{B} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ et pour $m \in \{1, \ldots n-1\}$, $s_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ est une section de B.

Considérons des éléments $p < q$ de $\{1, \ldots, n-1\}$. Puisque $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est un intervalle de B, $B(x_p, x_q) = B(x_1, x_q)$ et $B(x_q, x_p) = B(x_q, x_1)$. Comme $\{x_q, \ldots, x_{n-1}\}$ est un intervalle de B, $B(x_1, x_q) = B(x_1, x_{n-1})$ et $B(x_q, x_1) = B(x_{n-1}, x_1)$. Il s'ensuit que $B(x_p, x_q) = B(x_1, x_{n-1})$ et $B(x_q, x_p) = B(x_{n-1}, x_1)$. En conclusion, si $B(x_1, x_{n-1}) = B(x_{n-1}, x_1)$, alors B est constante et égale à $B(x_1, x_{n-1})$. Par contre, si $B(x_1, x_{n-1}) \neq B(x_{n-1}, x_1)$, alors B est totalement ordonnée par $B(x_1, x_{n-1})$. $\square$

Le théorème suivant de décomposition (voir la figure 4) découle directement du corollaire 1 et du théorème 1.

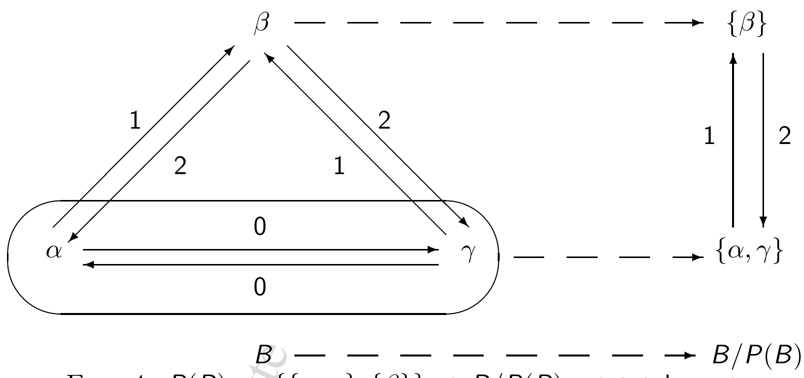

FIG. 4. $P(B) = \{\{\alpha, \gamma\}, \{\beta\}\}$ et $B/P(B)$ est totalement ordonné par 1.

Théorème 2 [1, 4, 7, 9]. — *Pour toute structure binaire B telle que $|\underline{B}|> 1$, le quotient $B/P(B)$ est constant, totalement ordonné ou indécomposable.*

Les différents types de connexité

Dans le premier paragraphe, afin d'introduire la notion de connexité, on a associé à chaque relation binaire R une relation d'équivalence $\mathcal{C}(R)$. À une structure binaire B de rang 2, correspond de même une relation d'équivalence $\mathcal{C}(B)$, de même base que B, définie comme suit. Pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, $\mathcal{C}(B)(x, y) = 1$ s'il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ d'éléments de $\underline{B}$ telle que pour tout $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, $B(x_m, x_{m+1}) = 1$ ou $B(x_{m+1}, x_m) = 1$, c'est-à-dire, $(B(x_m, x_{m+1}), B(x_{m+1}, x_m)) \neq (0, 0)$. Ceci permet de généraliser la notion de connexité à des structures binaires B, de rang quelconque, de la manière suivante. À chaque $(i, j) \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\} \times \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\}$ est associée la relation d'équivalence $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)$, de même base que B, définie comme suit. Pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(x, y) = 1$ s'il existe des suites $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ et $y_0 = y, \ldots, y_p = x$ d'éléments de $\underline{B}$ satisfaisant : pour tout $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(B(x_m, x_{m+1}), B(x_{m+1}, x_m)) \neq (i, j)$ et pour tout $m \in \{0, \ldots, p-1\}$, $(B(y_m, y_{m+1}), B(y_{m+1}, y_m)) \neq (i, j)$. Dans cette définition, l'existence de la seconde suite $y_0 = y, \ldots, y_p = x$ est nécessaire pour que $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)$ soit symétrique lorsque $i \neq j$. Par contre, pour tout $i \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\}$ et pour tous $x \neq y \in \underline{B}$, on a : $\mathcal{C}_{(i,i)}(B)(x, y) = 1$ si et seulement si il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ d'éléments de $\underline{B}$ telle que pour tout $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(B(x_m, x_{m+1}), B(x_{m+1}, x_m)) \neq (i, i)$. Soient $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\}$, les classes d'équivalence de $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)$ sont appelées *composantes (i, j)-connexes* de B. Une structure binaire est alors *(i, j)-connexe* lorsqu'elle admet une seule composante (i, j)-connexe. Les résultats suivants présentent les propriétés des composantes (i, j)-connexes en termes d'intervalle, d'intervalle élémentaire et de section.

Proposition 4. — *Considérons une structure binaire B, telle que $|\underline{B}|> 1$, et un élément i de $\{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\}$.*

(1) *Si C est une composante (i, i)-connexe de B, alors pour tous $x \in C$ et $y \in \underline{B} - C$, $B(x, y) = B(y, x) = i$.*

(2) *Si C et D sont des composantes (i, i)-connexes distinctes de B, alors pour tous $x \in C$ et $y \in D$, $B(x, y) = i$.*

(3) *Les composantes (i, i)-connexes de B sont des intervalles élémentaires et des sections de B.*

(4) *Si B n'est pas (i, i)-connexe, alors $P(B)$ est la famille des composantes (i, i)-connexes de B et $B/P(B)$ est constant et égal à i.*

Preuve. Considérons une composante (i, i)-connexe C de B. Soient $x \in C$ et $y \in \underline{B} - C$: si $B(x, y) \neq i$ ou si $B(y, x) \neq i$, alors $\mathcal{C}_{(i,i)}(B)(x, y) = 1$ et, donc y appartiendrait à C. Par conséquent, pour tous $x \in C$ et $y \in \underline{B} - C$, $B(x, y) = B(y, x) = i$. Par suite, les composantes (i, i)-connexes de B sont, non seulement, des intervalles de B, mais aussi, des sections de B. De plus, si C et D sont des composantes (i, i)-connexes distinctes de B, alors pour tous $x \in C$ et $y \in D$, $B(x, y) = i$.

Montrons, à présent, que toute composante (i,i)-connexe C de B est un intervalle élémentaire de B. Il suffit de montrer que pour tout intervalle I de B, si $C\cap I$ et $C-I$ ne sont pas vides, alors $I \subseteq C$. Soient $\alpha \in C-I$ et $\beta \in C\cap I$: comme C est une composante (i,i)-connexe de B, il existe une suite d'éléments $x_0 = \alpha, \dots, x_n = \beta$ de C telle que pour $m = 0, \dots, n-1$, $(B(x_m, x_{m+1}), B(x_{m+1}, x_m)) \neq (i,i)$. En notant p le plus grand des éléments m de $\{0, \dots, n\}$ tels que $x_m \in C - I$, on obtient : $x_p \in C - I$ et $x_{p+1} \in C \cap I$. Puisque I est un intervalle de B, pour tout $x \in I$, $B(x_p, x) = B(x_p, x_{p+1})$ et $B(x, x_p) = B(x_{p+1}, x_p)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $(B(x_p, x), B(x, x_p)) \neq (i,i)$; ce qui entraîne que $\mathcal{C}_{(i,i)}(B)(x_p, x) = 1$ et, donc, $x \in C$.

Finalement, supposons que B n'est pas (i,i)-connexe et notons P la famille des composantes (i,i)-connexes de B. Par ce qui précède, tous les éléments de P sont des intervalles élémentaires de B et le quotient B/P est constant et égal à i. Il résulte du corollaire 2 que $P = P(B)$. $\square$

Proposition 5. — *Considérons une structure binaire B, telle que $|\underline{B}| > 1$, et des éléments distincts i et j de $\{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$.*

(1) *Si C est une composante (i,j)-connexe de B, alors pour tout $x \in \underline{B} - C$, ou bien pour tout $y \in C$, $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$ ou bien pour tout $y \in C$, $(B(x,y), B(y,x)) = (j,i)$.*

(2) *Si C et D sont des composantes (i,j)-connexes distinctes de B, alors ou bien pour tous $x \in C$ et $y \in D$, $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$ ou bien pour tous $x \in C$ et $y \in D$, $(B(x,y), B(y,x)) = (j,i)$.*

(3) *Les composantes (i,j)-connexes de B sont des intervalles élémentaires de B.*

(4) *Si B n'est pas (i,j)-connexe, alors $P(B)$ est la famille des composantes (i,j)-connexes de B et $B/P(B)$ est totalement ordonné par l'ordre total T de base $P(B)$ tel que $T^{-1}(\{0\}) = (B/P(B))^{-1}(\{i\})$ et $T^{-1}(\{1\}) = (B/P(B))^{-1}(\{j\})$. De plus, le plus petit élément et le plus grand élément de T sont des sections non triviales de B.*

Preuve. Considérons une composante (i,j)-connexe C de B et un élément $x \in \underline{B} - C$. Pour tout $y \in C$, puisque $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(x,y) = 0$, $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$ ou (j,i). Supposons alors qu'il existe $y, z \in C$ tels que $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$ et $(B(x,z), B(z,x)) = (j,i)$. Puisque $y, z \in C$, avec $y \neq z$, il existe une suite $z_1 = z, \dots, z_n = y$ d'éléments de $\underline{B}$ telle que pour $m \in \{1, \dots, n-1\}$, $(B(z_m, z_{m+1}), B(z_{m+1}, z_m)) \neq (i,j)$. Comme $i \neq j$, en considérant les suites $z_0 = x, z_1 = z, \dots, z_n = y$ et $y_0 = y, y_1 = x$, on obtient : $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(x,y) = 1$. Par conséquent, ou bien pour tout $y \in C$, $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$ ou bien pour tout $y \in C$, $(B(x,y), B(y,x)) = (j,i)$.

Il s'ensuit que les composantes (i,j)-connexes de B sont des intervalles de B. Par suite, si C et D sont des composantes (i,j)-connexes distinctes de B, alors, par la proposition 1.3, il existe $k, l \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que pour tous $x \in C$ et $y \in D$, $(B(x,y), B(y,x)) = (k,l)$. Par ce qui précède, $(k,l) = (i,j)$ ou (j,i).

Soit C une composante (i,j)-connexe de B, considérons un intervalle I de B tel que $C - I$ et $C \cap I$ ne sont pas vides, et montrons que $I \subseteq C$. Étant donnés $\alpha \in C - I$ et $\beta \in C \cap I$: puisque $i \neq j$, $(B(\alpha,\beta), B(\beta,\alpha)) \neq (i,j)$ ou $(B(\beta,\alpha), B(\alpha,\beta)) \neq (i,j)$. Supposons, par exemple, que $(B(\alpha,\beta), B(\beta,\alpha)) \neq (i,j)$.

Comme $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(\alpha,\beta) = 1$, il existe une suite $\beta_0 = \beta, \ldots, \beta_n = \alpha$ d'éléments de $\underline{B}$ telle que pour $m = 0, \ldots, n-1$, $(B(\beta_m, \beta_{m+1}), B(\beta_{m+1}, \beta_m)) \neq (i,j)$. Pour tout $m \in \{0, \ldots, n\}$, en considérant les suites $\alpha, \beta_0 = \beta, \ldots, \beta_m$ et $\beta_m, \ldots, \beta_n = \alpha$, on a : $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(\alpha, \beta_m) = 1$ et, donc, $\beta_m \in C$. En notant alors p le plus grand des éléments m de $\{0, \ldots, n\}$ tels que $\beta_m \in C \cap I$, on obtient : $\beta_p \in C \cap I$ et $\beta_{p+1} \in C - I$. Étant donné $x \in I$: puisque I est un intervalle de B, $B(\alpha,\beta) = B(\alpha, x)$, $B(x,\alpha) = B(\beta,\alpha)$, $B(\beta_p, \beta_{p+1}) = B(x, \beta_{p+1})$ et $B(\beta_{p+1}, \beta_p) = B(\beta_{p+1}, x)$. Par suite, $(B(\alpha,x), B(x,\alpha)) \neq (i,j)$ et $(B(x,\beta_{p+1}), B(\beta_{p+1}, x)) \neq (i,j)$. En considérant les suites α, x et $x, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_n = \alpha$, on obtient : $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(\alpha, x) = 1$ et, donc, $x \in C$. Par conséquent, C est un intervalle élémentaire de B.

À présent, supposons que B n'est pas (i,j)-connexe et notons P la famille des composantes (i,j)-connexes de B. Par ce qui précède, P est une partition intervallaire de B et pour tous $C \neq D \in P$, $((B/P)(C,D), (B/P)(D,C)) = (i,j)$ ou (j,i). Considérons alors la structure binaire T, de base P et de rang 2, définie par : $T^{-1}(\{0\}) = (B/P)^{-1}(\{i\})$ et $T^{-1}(\{1\}) = (B/P)^{-1}(\{j\})$. Comme $i \neq j$, pour tous $C \neq D \in P$, $T(C,D) \neq T(D,C)$. Par suite, pour montrer que T est un ordre total, il suffit de vérifier que T est transitif. Supposons, au contraire, qu'il existe des éléments distincts C, C' et C'' de P tels que $T(C,C') = T(C',C'') = T(C'',C) = 1$. Par définition de T, on a : $(B/P)(C,C') = (B/P)(C',C'') = (B/P)(C'',C) = j$ et $(B/P)(C,C'') = (B/P)(C'',C') = (B/P)(C',C) = i$. Ainsi, pour $x \in C$, $x' \in C'$ et $x'' \in C''$, on obtient : $B(x,x') = B(x',x'') = B(x'',x) = j$ et $B(x,x'') = B(x'',x') = B(x',x) = i$. Par conséquent, puisque $i \neq j$, en considérant les suites $x_0 = x, x_1 = x'$ et $y_0 = x', y_1 = x'', y_2 = x$, on aurait : $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(x,x') = 1$ et, donc, $C = C'$. Il en résulte que B/P est totalement ordonné par l'ordre total T. Il découle alors du corollaire 2 que $P = P(B)$.

Finalement, si, par exemple, X est le plus petit élément de T, alors $\{X\}$ et $P(B) - \{X\}$ sont des intervalles de T et, donc, de $B/P(B)$. Par la proposition 2, $\cup\{X\} = X$ et $\cup(P(B) - \{X\}) = \underline{B} - X$ sont des intervalles de B et, donc, X est une section non triviale de B. □

Corollaire 3. — *Étant donnée une structure binaire B, telle que $|\underline{B}| > 1$, toutes les sections de B sont triviales si et seulement si pour tous $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B)-1\}$, B est (i,j)-connexe.*

Preuve. Si B admet une section non triviale X, alors, par la proposition 1.3, il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que pour tous $x \in X$ et $y \in \underline{B} - X$, $(B(x,y), B(y,x)) = (i,j)$. Ainsi, pour tous $x \in X$ et $y \in \underline{B} - X$, $\mathcal{C}_{(i,j)}(B)(x,y) = 0$ et, donc, B n'est pas (i,j)-connexe. Inversement, s'il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que B n'est pas (i,j)-connexe, alors, par les propositions 4 et 5, B admet une section non triviale. □

Ce corollaire permet de simplifier la preuve du théorème 1.

Nouvelle preuve du théorème 1. De même que dans la première preuve du théorème 1, on établit que pour toute structure binaire décomposable B, si tous les intervalles élémentaires de B sont triviaux, alors B est constante ou totalement ordonnée. On considère encore un intervalle non trivial X de B, qui est maximal pour l'inclusion, et, à l'aide de la proposition 1, on montre que X est une section non triviale de B. Par le corollaire précédent, il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que B n'est pas (i, j)-connexe. Il découle alors des propositions 4 et 5 que $P(B)$ est la famille des composantes (i, j)-connexes de B et que $B/P(B)$ est constant ou totalement ordonné. De plus, les composantes (i, j)-connexes de B sont des intervalles élémentaires de B. Par hypothèse, ils sont triviaux et, donc, $P(B) = \{\{x\}; x \in \underline{B}\}$. Ainsi, l'application définie sur $\underline{B}$, qui à tout $x \in \underline{B}$ associe $\{x\} \in P(B)$, est un isomorphisme de B sur $B/P(B)$. Par suite, B est constante ou totalement ordonnée. $\square$

Ces différentes connexités permettent alors de préciser le théorème de décomposition.

Théorème 3 [1, 4]. — *Étant donnée une structure binaire B telle que $|\underline{B}| > 1$, l'une des assertions suivantes est satisfaite.*

(1) *Il existe $i \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tel que B n'est pas (i, i)-connexe. La partition élémentaire $P(B)$ est alors constituée des composantes (i, i)-connexes de B et $B/P(B)$ est constant et égal à i.*

(2) *Il existe $i \neq j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tel que B n'est pas (i, j)-connexe. La partition élémentaire $P(B)$ est alors constituée des composantes (i, j)-connexes de B et $B/P(B)$ est totalement ordonné par i.*

(3) *Pour tous $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$, B est (i, j)-connexe. Le quotient $B/P(B)$ est alors indécomposable, avec $|P(B)| \geqslant 3$.*

Preuve. Si B admet une section non triviale, alors le corollaire 3 et les propositions 4 et 5 permettent de conclure. Si toutes les sections de B sont triviales, alors, par la proposition 2, il en est de même de $B/P(B)$ et, en particulier, $|P(B)| \geqslant 3$. Par ailleurs, par le corollaire 1, tous les intervalles élémentaires de $B/P(B)$ sont triviaux. Il résulte alors du début de la preuve du théorème 1, où l'on considère la structure binaire $B/P(B)$, que $B/P(B)$ est indécomposable. $\square$

Ces différentes connexités permettent aussi d'obtenir les premières propriétés des structures binaires indécomposables. Tout d'abord, rappelons les résultats analogues pour les graphes orientés [3]. Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$. Pour tout $x \in S$, le *voisinage intérieur* de x est la famille $V_G^-(x) = \{y \in S : (y, x) \in A\}$ et le *voisinage extérieur* de x est la famille $V_G^+(x) = \{y \in S : (x, y) \in A\}$. Considérons, à présent, un graphe orienté et indécomposable $G = (S, A)$. Soit $x \in S$ tel que pour tout $X \subseteq S$, si $|X| = 3$ ou 4 et si $x \in X$, alors le sous-graphe $G(X)$ est décomposable. On montre alors que les sous-graphes $G(V_G^-(x) - V_G^+(x))$ et $G(V_G^+(x) - V_G^-(x))$ sont des ordres totaux, que $G(S - (V_G^-(x) \cup V_G^+(x) \cup \{x\}))$ est vide et que $G(V_G^-(x) \cap V_G^+(x))$ est complet. Ceci se généralise à une structure binaire B de la façon suivante. Notons $W(B)$ l'ensemble des éléments x de $\underline{B}$ vérifiant : pour toute partie X de $\underline{B}$, si $|X| = 3$ ou 4 et si $x \in X$, alors $B(X)$ est décomposable. Pour tout $x \in \underline{B}$ et pour tous $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$, le (i, j)-*voisinage* de x est la famille $V_B^{(i,j)}(x) = \{y \in \underline{B} : (B(x, y), B(y, x)) = (i, j)\}$.

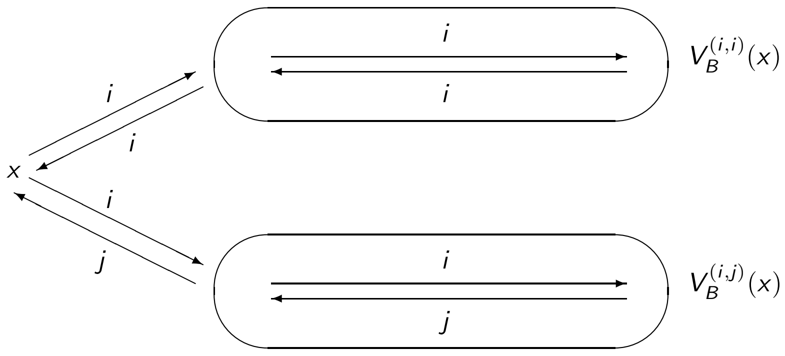

FIG. 5. $V_B^{(i,i)}(x)$ et $V_B^{(i,j)}(x)$, où $x \in W(B)$ et $i \neq j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$.

Proposition 6 (Voir la figure 5). — *Considérons une structure binaire indécomposable B, telle que $\mid \underline{B} \mid > 2$, et un élément x de $W(B)$.*

(1) *Pour tout $i \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$, si $\mid V_B^{(i,i)}(x) \mid > 1$, alors $B(V_B^{(i,i)}(x))$ est constante et égale à i.*

(2) *Pour tous $i \neq j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$, si $\mid V_B^{(i,j)}(x) \mid > 1$, alors $B(V_B^{(i,j)}(x))$ est totalement ordonnée par i et par j.*

Preuve. Soit i un élément de $\{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tel que $\mid V_B^{(i,i)}(x) \mid > 1$, montrons que chaque composante (i, i)-connexe C de $B(V_B^{(i,i)}(x))$ est un intervalle de B. Soient $y \neq y' \in C$ tels que $B(y, y') \neq i$ et soit $z \in \underline{B} - (V_B^{(i,i)}(x) \cup \{x\})$: comme $x \in W(B)$, $B(\{x, y, y', z\})$ est décomposable. Quel que soit l'intervalle non trivial de $B(\{x, y, y', z\})$, on vérifie que $\{y, y'\}$ est un intervalle de $B(\{y, y', z\})$. Par suite, puisque $B(C)$ est (i, i)-connexe, C est un intervalle de $B(C \cup \{z\})$. Comme $C \subseteq V_B^{(i,i)}(x)$, C est un intervalle de $B(C \cup \{x\})$. De plus, par la proposition 4, C est un intervalle de $B(V_B^{(i,i)}(x))$. Par suite, C est un intervalle de B. Finalement, puisque B est indécomposable, toutes les composantes (i, i)-connexes de $B(V_B^{(i,i)}(x))$ sont réduites à des singletons, c'est-à-dire, $B(V_B^{(i,i)}(x))$ est constante et égale à i.

Soient i, j des éléments distincts de $\{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que $\mid V_B^{(i,j)}(x) \mid > 1$, montrons que chaque composante (i, j)-connexe C de $B(V_B^{(i,j)}(x))$ est un intervalle de B. Puisque $C \subseteq V_B^{(i,j)}(x)$, C est un intervalle de $B(C \cup \{x\})$. En outre, par la proposition 5, C est un intervalle de $B(V_B^{(i,j)}(x))$. Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout $z \in \underline{B} - (V_B^{(i,j)}(x) \cup \{x\})$, C est un intervalle de $B(C \cup \{z\})$. Notons k et l les éléments de $\{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que $z \in V_B^{(k,l)}(x)$: comme $z \notin V_B^{(i,j)}(x)$, $(k, l) \neq (i, j)$. Soit $y \in V_B^{(i,j)}(x)$: puisque $(k, l) \neq (i, j)$, $\{y, z\}$ n'est pas un intervalle de $B(\{x, y, z\})$. Comme $x \in W(B)$, $B(\{x, y, z\})$ est décomposable et, donc, $\{x, y\}$ ou $\{x, z\}$ sont des intervalles de $B(\{x, y, z\})$. Il s'ensuit que $y \in V_B^{(i,j)}(z) \cup V_B^{(l,k)}(z)$. Supposons, par l'absurde, que $(l,k) \neq (i,j)$ et que $V_B^{(i,j)}(z) \cap C$ et $V_B^{(l,k)}(z) \cap C$ ne sont pas vides. Montrons alors que $B(C)$ n'est pas (i,j)-connexe. En effet, pour tous $y \in V_B^{(i,j)}(z) \cap C$ et $y' \in V_B^{(l,k)}(z) \cap C$: puisque $x \in W(B)$, $B(\{x,y,y',z\})$ admet un intervalle non trivial I et on vérifie que $I = \{x,y'\}$ ou $\{x,y',z\}$. Dans les deux cas, on obtient : $B(y,y') = j$ et $B(y',y) = i$. Par suite, $B(C)$ ne serait pas (i,j)-connexe. Ainsi, toutes les composantes (i,j)-connexes de $B(V_B^{(i,j)}(x))$ sont des intervalles de B. De même, comme B est indécomposable, elles sont réduites à des singletons ; autrement dit, $B(V_B^{(i,j)}(x))$ est totalement ordonnée par i et par j. □

Corollaire 4. — *Pour toute structure binaire indécomposable B, telle que $|\underline{B}| > 2$, $|W(B)| \leqslant 1$.*

Preuve. Supposons, par l'absurde, que $|W(B)| > 1$ et montrons, tout d'abord, que pour tous $x \neq y \in W(B)$, $B(x,y) \neq B(y,x)$. En effet, s'il existe $x \neq y \in W(B)$ et $i \in \{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ tels que $B(x,y) = B(y,x) = i$, alors vérifions que $\{x,y\}$ serait un intervalle de B ; ce qui contredirait l'indécomposabilité de B. Soit $z \in \underline{B} - \{x,y\}$. Si $\{x,z\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$, alors $x,z \in V_B^{(i,i)}(y)$. Par la proposition précédente, comme $y \in W(B)$, $B(V_B^{(i,i)}(y))$ est constante et égale à i et, en particulier, $B(x,z) = B(z,x) = i$. Par suite, $\{x,y\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$. De la même façon, si $\{y,z\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$, alors $\{x,y\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$. Par conséquent, comme $x \in W(B)$, $B(\{x,y,z\})$ est décomposable et, quel que soit l'intervalle non trivial de $B(\{x,y,z\})$ que l'on considère, on en déduit que $\{x,y\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$.

Étant donnés $x \neq y \in W(B)$: par ce qui précède, il existe $i \neq j \in \{0,\ldots,\mathrm{rg}(B)-1\}$ tels que $B(x,y) = i$ et $B(y,x) = j$. Notons V l'ensemble des $v \in \underline{B} - \{x,y\}$ tels que $\{x,y\}$ n'est pas un intervalle de $B(\{x,y,v\})$. Pour tout $v \in V$, montrons que $B(x,v) = B(v,y) = i$ et $B(y,v) = B(v,x) = j$. Puisque $x \in W(B)$, $B(\{x,y,v\})$ est décomposable, et, puisque $v \in V$, $\{x,v\}$ ou $\{y,v\}$ sont des intervalles de $B(\{x,y,v\})$. Si, par exemple, $\{x,v\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,v\})$, alors $x,v \in V_B^{(j,i)}(y)$. Par la proposition précédente, $(B(x,v),B(v,x)) = (i,j)$ ou (j,i) et, comme $v \in V$, $(B(x,v),B(v,x)) = (i,j)$.

Montrons, à présent, que $V \cup \{x,y\}$ est un intervalle de B. Il suffit de montrer que pour tous $v \in V$ et $z \in \underline{B} - (V \cup \{x,y\})$, $\{x,y,v\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z,v\})$. Puisque $z \notin V$, $\{x,y\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z\})$ et, puisque $x,y \in W(B)$, $B(\{x,z,v\})$ et $B(\{y,z,v\})$ sont décomposables. On vérifie alors que, quels que soient les intervalles non triviaux de $B(\{x,z,v\})$ et de $B(\{y,z,v\})$, $\{x,y,v\}$ est un intervalle de $B(\{x,y,z,v\})$. En conclusion, $V \cup \{x,y\}$ est un intervalle de B, $\{x\} \cup V$ est un intervalle de $B(V \cup \{x,y\})$ et, donc, B serait décomposable. □

Le résultat suivant découle directement de ce corollaire.

Corollaire 5. — *Si B est une structure binaire indécomposable telle que $|\underline{B}| > 2$, alors il existe $X \subseteq \underline{B}$ telle que $|X| = 3$ ou 4 et $B(X)$ est indécomposable.*

Ce corollaire peut être amélioré comme suit.

Corollaire 6. — *Si B est une structure binaire indécomposable telle que $|\underline{B}| > 2$, alors pour tout $x \in \underline{B}$, il existe $X \subseteq \underline{B}$ satisfaisant : $3 \leqslant |X| \leqslant 5$, $x \in X$ et $B(X)$ est indécomposable.*

Preuve. Par définition de $W(B)$, pour tout $x \in \underline{B}$, l'existence d'une telle partie X est assurée dès que $x \notin W(B)$. Supposons donc que $x \in W(B)$. Par le corollaire 4, $W(B) = \{x\}$ et, en considérant un élément de $\underline{B} - \{x\}$, on obtient une partie Y de $\underline{B}$ vérifiant : $|Y| = 3$ ou 4, $B(Y)$ est indécomposable et, donc, $x \notin Y$. Il suffit alors de montrer que $B(Y \cup \{x\})$ est indécomposable et, puisque $x \in W(B)$, $|Y \cup \{x\}| = 5$. Supposons, au contraire, que $B(Y \cup \{x\})$ admet un intervalle non trivial I. Comme $I \cap Y$ est un intervalle de $B(Y)$, qui est indécomposable, $I \cap Y = \varnothing$, $|I \cap Y| = 1$ ou $I \cap Y = Y$. Par suite, ou bien il existe $y \in Y$ tel que $I = \{x, y\}$ ou bien $I = Y$. Si $I = Y$, alors il existe $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{rg}(B) - 1\}$ tels que $Y \subseteq V_B^{(i,j)}(x)$. Par la proposition 6, $B(Y)$ serait constante ou totalement ordonnée et, par conséquent, décomposable. Si $I = \{x, y\}$, où $y \in Y$, alors l'application définie sur Y, qui est fixe sur $Y - \{y\}$ et qui associe x à y, réalise un isomorphisme de $B(Y)$ sur $B((Y - \{y\}) \cup \{x\})$. Par suite, $B((Y - \{y\}) \cup \{x\})$ serait indécomposable et x n'appartiendrait pas à $W(B)$. $\square$

Pour obtenir des sous-structures binaires indécomposables plus grandes, on peut utiliser les mêmes techniques que pour les graphes [8, 10] ou les 2-structures [4, 5].

Références

[1] A. Boussaïri, P. Ille, G. Lopez, S. Thomassé, The C_3-structure of the tournaments, *Discrete Math.* **277** (2004) 29-43.

[2] A. Cournier, M. Habib, An efficient algorithm to recognize prime undirected graphs, in : E.W. Mayr (Ed.), Graph-Theoritic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 657, Springer, Berlin, 1993, 212-224.

[3] A. Cournier, P. Ille, Minimal indecomposable graph, *Discrete Math.* **183** (1998) 61-80.

[4] A. Ehrenfeucht, T. Harju, G. Rozenberg, The Theory of 2-Structures, A Framework for Decomposition and Transformation of Graphs, World Scientific, 1999.

[5] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, *Theoret. Comput. Sci.* **3 (70)** (1990) 343-358.

[6] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Order, Description and Roles, North-Holland, Amsterdam, 1984, 313-342.

[7] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967) 25-66.

[8] P. Ille, Indecomposable graphs, *Discrete Math.* **173** (1997) 71-78.

[9] F. Maffray, M. Preissmann, A translation of Tibor Gallai's paper : Transitiv orientierbare Graphen, in : Perfect graphs, J.L. Ramirez-Alfonsin and B.A. Reed (Ed.), J. Wiley (2001), 25-66.

[10] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, *Discrete Math.* **113** (1993) 191-205.

[11] J. Spinrad, P4-trees and substitution decomposition, *Discrete Appl. Math.* **39** (1992) 263-291.

[12] D.P. Sumner, Graphs indecomposable with respect to the X-join, *Discrete Math.* **6** (1973) 281-298.