Pierre ILLE
Institut de Mathématiques de Luminy

La décomposition intervallaire des ordres partiels

Un graphe (orienté) G se compose d'un couple (S, A), où S est l'ensemble (fini) des sommets de G, et A est une famille de couples de sommets distincts, appelés arcs de G. Par exemple, étant donné un ensemble S, $(S, \emptyset)$ est le graphe vide sur S tandis que $(S, (S \times S) - \{(x, x) \; ; \; x \in S\})$ est le graphe complet. Un graphe $G = (S, A)$ est symétrique lorsque pour tous $x, y \in S$, on a : $(x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \in A$. Un ordre partiel (strict) est un graphe $O = (S, A)$ tel que pour tous $x, y, z \in S$, on a : $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A \Longrightarrow (x, z) \in A$. À chaque ordre partiel $O = (S, A)$ est associé son graphe de comparabilité $\mathrm{Comp}(O)$ défini sur S de la façon suivante : pour tous $x, y \in S$, (x, y) est un arc de $\mathrm{Comp}(O)$ si $(x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$. Un ordre total est alors un ordre partiel dont le graphe de comparabilité est complet.

Considérons un graphe $G = (S, A)$. Une partie X de S est un intervalle (ou un module ou un clan ou une partie homogène...) de G lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, on a : $(a, x) \in A \Longleftrightarrow (b, x) \in A$ et $(x, a) \in A \Longleftrightarrow (x, b) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$, où $x \in S$, et S sont des intervalles de G, appelés intervalles triviaux. Un graphe est alors indécomposable (ou premier ou primitif) lorsque tous ses intervalles sont triviaux.

Rappelons une propriété fondamentale des intervalles d'un graphe $G = (S, A)$. Si X et Y sont des intervalles disjoints de G, alors pour tous $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$, on a : $(x, y) \in A \Longleftrightarrow (x', y') \in A$. Cette propriété conduit à introduire les partitions intervallaires de G qui sont les partitions de S constituées par des intervalles de G. Elle permet alors de considérer les éléments d'une telle partition P comme les sommets d'un nouveau graphe, le quotient $G/P = (P, A/P)$ de G par P défini comme suit : pour tous $X \neq Y \in P$, $(X, Y) \in A/P$ si $(x, y) \in A$ pour $x \in X$ et $y \in Y$. Le premier résultat de décomposition est dû à Gallai (1967). Il concerne uniquement les ordres partiels : à un quotient près, un ordre partiel est soit un ordre total soit vide soit indécomposable. Il s'ensuit une décomposition des graphes de comparabilité et, plus généralement, des graphes symétriques : à un quotient près, un graphe symétrique est complet, vide ou indécomposable. On comparera les intervalles et la décomposition d'un ordre partiel et de son graphe de comparabilité. Finalement, on présentera le théorème de décomposition généralisé.