

Correction TD 05 – Hamiltonien

Exercice 2.*Modélisation Hamiltonien*

Dans un graphe non-orienté sans boucle $G = (V, E)$, un *cycle hamiltonien* est un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Le problème de décision **Hamiltonien** consiste, étant donné un graphe G , à décider s'il possède un cycle Hamiltonien.

 Pseudo-code du vérificateur montrant que **Hamiltonien** est dans NP.

Le certificat qu'une instance est positive consiste en une liste ordonnée des sommets qui forme un cycle hamiltonien. On vérifie que la liste contient exactement une fois chaque sommet (en retenant les sommets visités dans un vecteur de n booléens), et que la liste suit bien des arêtes du graphe (pour former un cycle hamiltonien).

```

algorithme Hamiltonien-verif(G, l):
    si longueur(l) != G.n alors:
        retourner faux
    v = tableau de longueur G.n
    pour i de 0 à G.n-1 faire:
        v[i] = faux
    pour i de 0 à G.n-1 faire:
        si v[l[i]] alors:
            retourner faux
        v[l[i]] = vrai
        si !G.A[l[i]][l[(i+1)%G.n]] alors:
            retourner faux
    retourner vrai
  
```

Temps $\Theta(n)$ avec n le nombre de sommets du graphe (et la taille de la liste). Remarquons que quand l'algorithme retourne vrai, alors toutes les cases du tableau v sont à vrai. Le dernier si teste les adjacences dans la matrice $G.A$ avec l'indice $i + 1$ pris modulo n afin que pour $i = n - 1$ on teste bien si l'arête entre les dernier et premier éléments de l existe (notons le symbole ! de la négation : dès qu'une arête n'existe pas on retourne faux).

Nous allons modéliser ce problème à l'aide d'une formule propositionnelle (réduction vers SAT), en utilisant n^2 variables notées $x_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq n$, avec la sémantique que $x_{i,j} = 1$ lorsque le sommet i est en position j dans le cycle Hamiltonien.

1. Quelles clauses faut-il ajouter afin que chaque position contienne un, et un seul, sommet ?

$$\left[\bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigvee_{1 \leq i \leq n} x_{i,j} \right] \wedge \left[\bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{1 \leq i' \leq n, i' \neq i} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i',j}) \right]$$

2. Quelles clauses faut-il ajouter afin que chaque sommet apparaisse en une, et une seule, position ?

$$\left[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j \leq n} x_{i,j} \right] \wedge \left[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigwedge_{1 \leq j' \leq n, j' \neq j} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,j'}) \right]$$

3. Quelles clauses faut-il ajouter afin que la séquence de sommets soit bien un cycle du graphe G ?

Les sommets consécutifs sont adjacents (toute paire de sommets non-adjacents ne peuvent pas être à deux positions consécutives) :

$$\bigwedge_{\{u,v\} \notin E} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} (\neg x_{u,j} \vee \neg x_{v,j+1}) \wedge (\neg x_{v,j} \vee \neg x_{u,j+1})$$

avec la position $n + 1$ (pour $j + 1$ quand $j = n$) identifiée à la position 1.

4. Conclure que **Hamiltonien** $\leq_m^P$ **SAT**.

La construction de la formule est bien en temps polynomial (au plus trois boucles imbriquées de 1 à n). On peut remarquer que la formule produite contient n^2 variables, $2n$ clauses de taille n , $2n(n - 1)$ clauses de taille 2, et encore $2n \left(\frac{n(n-1)}{2} - |E| \right)$ clauses de taille 2.

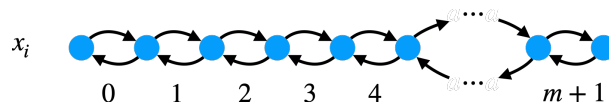
5. Que peut-on en déduire sur la complexité de **Hamiltonien**?

Que le problème est dans NP, car **SAT** est dans NP.

- ✎ Montrons que **3-SAT** $\leq_m^P$ **Hamiltonien** (donc ce dernier est NP-difficile et dans NP, c'est-à-dire qu'il est NP-complet).

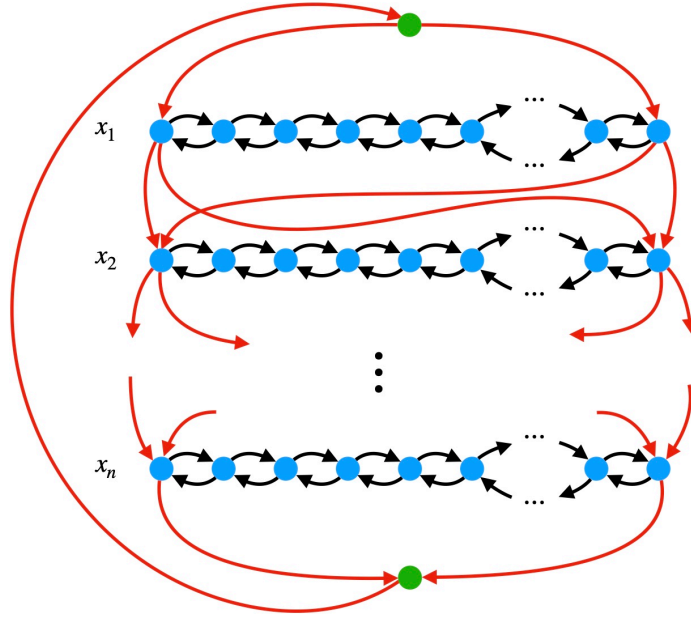
Étant donné une formule $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause, n variables et m clauses, on construit un graphe G correspondant de la façon suivante.

Pour chaque variable x_i de la formule on a un gadget de la forme :

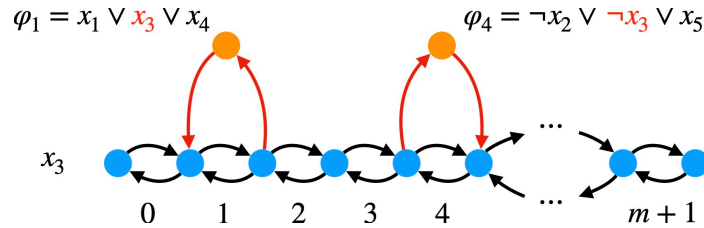


Intuitivement, parcourir ce gadget de gauche à droite correspond à choisir $x_i = \text{faux}$, alors que le parcourir de droite à gauche correspond à choisir $x_i = \text{vrai}$.

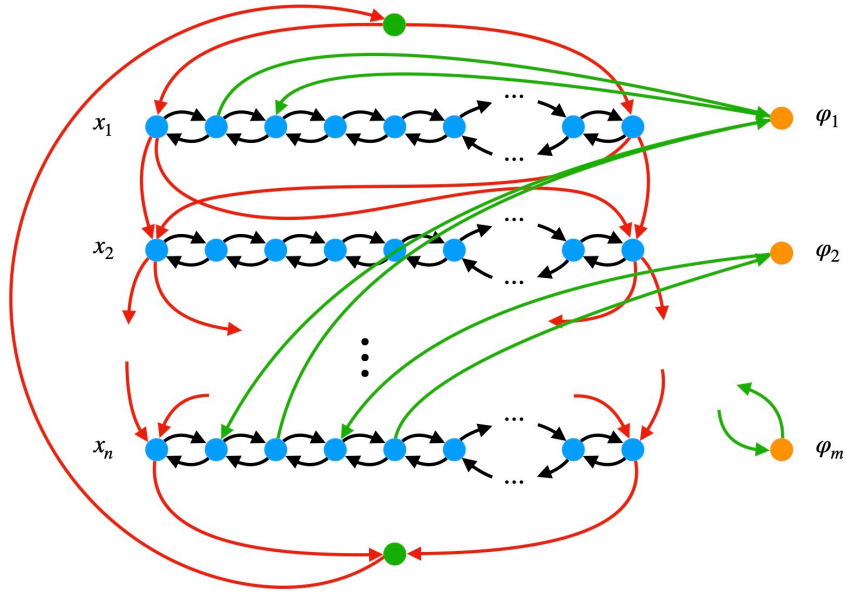
Les gadgets pour chaque variable $x_1, \dots, x_n$ sont reliés de la façon suivante, qui permet de passer au gadget de la variable suivante dans l'une des deux directions, ainsi que de refermer le cycle :



On ajoute également un sommet pour chaque clause φ_j , que l'on relie au gadget de la variable x_i (en position correspondant à la numérotation de la clause) si cette variable apparaît dans la clause. La direction des arcs est de droite à gauche si la variable apparaît sous forme positive dans la clause, et de gauche à droite si elle apparaît sous forme négative. Cela permet de traverser le sommet correspondant à la clause si la direction avec laquelle on parcourt le gadget de la variable correspond à une affectation qui satisfait la clause :



Globalement, chaque sommet associé à une clause est relié à trois gadgets correspondant aux variables qui y apparaissent. Cela donne un graphe final ayant une forme du type :



La taille de ce graphe est polynomiale (on a $\Theta(mn)$ sommets), les arcs rouges sont fixés, et on peut construire les arcs verts en parcourant simplement la formule φ .

$\Rightarrow$ Une affectation des variables de la formule correspond à une direction de parcours pour chaque gadget correspondant à une variable. Si une telle affectation satisfait la formule, alors il sera possible de visiter chaque sommet φ_j à partir du gadget d'une variable (si plusieurs littéraux satisfont φ_j , on en choisit arbitrairement un pour ne pas visiter plusieurs fois le sommet) et donc de parcourir tous les sommets du graphe une et une seule fois en un cycle hamiltonien.

$\Leftarrow$ On interprète un cycle hamiltonien dans le graphe comme une affectation des variables de φ en fonction de la direction de parcours de chaque gadget correspondant à une variable. Comme le cycle visite chaque sommet, en particulier ceux qui correspondent aux clauses de la formule, cela nous garantit que chaque clause est satisfaite (par au moins un littéral dont la variable est parcourue dans le bon sens), et donc la formule est satisfaisable. On peut conclure que la transformation proposée d'une formule en graphe est bien une réduction many-one polynomiale depuis le problème **3-SAT** (connu pour être NP-difficile), ce qui implique que le problème **Hamiltonien** est NP-difficile.