

Correction TD 02 – Chaussettes

Exercice 2.

Rappels de logique propositionnelle

Nous allons modéliser le principe des tiroirs (*pigeonhole principle*) comme une formule CNF. Ce principe affirme que si n chaussettes sont rangées dans m tiroirs et que $n > m$, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. En termes mathématiques, si E et F sont deux ensembles finis et que $|E| > |F|$, alors il n'existe pas d'application injective de E dans F .

Pour cette modélisation, nous utiliserons mn variables de la forme $p_{i,j}$, indiquant si la chaussette $i \in \{1, \dots, n\}$ se trouve dans le tiroir $j \in \{1, \dots, m\}$ ($p_{i,j} = \top$) ou non ($p_{i,j} = \perp$). Pour n et m donnés, nous souhaitons construire une formule modélisant les rangements des n chaussettes dans les m tiroirs, qui vérifient que :

- chaque chaussette est rangée dans un tiroir, et
- chaque tiroir contient au plus une chaussette.

Chaque contrainte donne une clause, dont la conjonction impose (pour satisfaire la formule) aux variables de correspondre à un rangement des chaussettes qui respecte toutes les contraintes. Puisque ce problème a une solution si et seulement si $n \leq m$, il en sera de même pour notre formule qui sera satisfaisable si et seulement si $n \leq m$.

6. Donner une formule en FNC pour $n = 2$ et $m = 2$. Est-elle satisfaisable?

La chaussette 1 est dans un des deux tiroirs : $(p_{1,1} \vee p_{1,2})$.

La chaussette 2 est dans un des deux tiroirs : $(p_{2,1} \vee p_{2,2})$.

Le tiroir 1 ne contient pas les deux chaussettes : $(\neg p_{1,1} \vee \neg p_{2,1})$.

Le tiroir 2 ne contient pas les deux chaussettes : $(\neg p_{1,2} \vee \neg p_{2,2})$.

$\varphi = (p_{1,1} \vee p_{1,2}) \wedge (p_{2,1} \vee p_{2,2}) \wedge (\neg p_{1,1} \vee \neg p_{2,1}) \wedge (\neg p_{1,2} \vee \neg p_{2,2})$.

On peut ajouter des clauses pour imposer qu'une chaussette ne soit pas rangée dans deux tiroirs, mais ce n'est pas nécessaire (à vous de deviner pourquoi...?).

La chaussette 1 n'est pas dans les deux tiroirs : $(\neg p_{1,1} \vee \neg p_{1,2})$.

La chaussette 2 n'est pas dans les deux tiroirs : $(\neg p_{2,1} \vee \neg p_{2,2})$.

7. Donner une formule en FNC pour $n = 3$ et $m = 2$. Est-elle satisfaisable?

La chaussette 1 est dans un des deux tiroirs : $(p_{1,1} \vee p_{1,2})$.

La chaussette 2 est dans un des deux tiroirs : $(p_{2,1} \vee p_{2,2})$.

La chaussette 3 est dans un des deux tiroirs : $(p_{3,1} \vee p_{3,2})$.

Si la chaussette 1 est dans le tiroir 1, alors les chaussettes 2 et 3 n'y sont pas :

$p_{1,1} \Rightarrow \neg p_{2,1} \wedge \neg p_{3,1} \quad \equiv \quad \neg p_{1,1} \vee (\neg p_{2,1} \wedge \neg p_{3,1}) \quad \equiv \quad (\neg p_{1,1} \vee \neg p_{2,1}) \wedge (\neg p_{1,1} \vee \neg p_{3,1})$.

Si la chaussette 2 est dans le tiroir 1, alors les chaussettes 1 et 3 n'y sont pas :

$(\neg p_{2,1} \vee \neg p_{1,1}) \wedge (\neg p_{2,1} \vee \neg p_{3,1})$.

Si la chaussette 3 est dans le tiroir 1, alors les chaussettes 1 et 2 n'y sont pas :

$(\neg p_{3,1} \vee \neg p_{1,1}) \wedge (\neg p_{3,1} \vee \neg p_{2,1})$.

Idem pour les tiroirs 2 et 3.

Certaines clauses sont répétées dans ce qui précède. On obtient :

$\varphi = (p_{1,1} \vee p_{1,2}) \wedge (p_{2,1} \vee p_{2,2}) \wedge (p_{3,1} \vee p_{3,2}) \wedge (\neg p_{1,1} \vee \neg p_{2,1}) \wedge (\neg p_{1,1} \vee \neg p_{3,1}) \wedge (\neg p_{2,1} \vee \neg p_{3,1}) \wedge (\neg p_{1,2} \vee \neg p_{2,2}) \wedge (\neg p_{1,2} \vee \neg p_{3,2}) \wedge (\neg p_{2,2} \vee \neg p_{3,2}) \wedge (\neg p_{1,3} \vee \neg p_{2,3}) \wedge (\neg p_{1,3} \vee \neg p_{3,3}) \wedge (\neg p_{2,3} \vee \neg p_{3,3})$.

8. Généraliser la formule précédente pour tous $n, m \in \mathbb{N}_+$, à l'aide des notations $\bigwedge_{i=1}^n$ et $\bigvee_{i=1}^n$.

$$\bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m p_{i,j}$$

Chaque chaussette est dans au moins un tiroir

$\wedge$

Chaque tiroir contient au plus une chaussette $\iff$

$$\bigwedge_{j=1}^m \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^n (\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i',j})$$

Deux chaussettes ne sont pas dans le même tiroir

Optionnel :

$\wedge$

Chaque chaussette est dans au plus un tiroir $\iff$

$$\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^m \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^m (\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i,j'})$$

Chaque chaussette n'est pas dans deux tiroirs