
TD 05 – Approximation, modélisation

Exercice 1.*Approximation Bin-packing*

Source : Cormen problème 35-1.

Le problème d'optimisation du **Bin-packing** consiste, étant donnés n objets de tailles $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}$ et une taille de boîte p , à minimiser le nombre de boîtes utilisés pour ranger les n objets (une boîte ne pouvant contenir qu'un ensemble d'objets dont la somme des tailles est $\leq p$). L'entrée est codée comme une liste de nombres en binaires.

1. Expliquer comment résoudre **Partition** à l'aide d'un algorithme pour **Bin-packing**. Analyser le temps de calcul de la transformation (réduction).

Partition est un problème de décision NP-complet, donc **Bin-packing** est un problème d'optimisation NP-dur (il n'est pas dans NP car ici ce n'est pas un problème de décision).

2. Décrire le fonctionnement de l'algorithme *first-fit* pour le problème du **Bin-packing**.

Soit $S = \sum_{i=1}^n e_i$.

3. Donner une borne inférieure au nombre optimal de boîtes pour une instance donnée.
4. Expliquer pourquoi l'algorithme *first-fit* laisse au plus une boîte remplie à moins de la moitié de sa capacité p . Indice : par induction sur le nombre n d'objets.
5. En déduire que l'algorithme *first-fit* n'utilise jamais plus de $\left\lceil \frac{2S}{p} \right\rceil$ boîtes.
6. Proposer une implémentation efficace de l'algorithme *first-fit* pour le problème d'optimisation du **Bin-packing**, et analyser son temps de calcul.

Exercice 2.*Modélisation Hamiltonien*

Dans un graphe non-orienté sans boucle $G = (V, E)$, un *cycle hamiltonien* est un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Le problème de décision **Hamiltonien** consiste, étant donné un graphe G , à décider s'il possède un cycle Hamiltonien.

Nous allons modéliser ce problème à l'aide d'une formule propositionnelle (réduction vers **SAT**), en utilisant n^2 variables notées $x_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq n$, avec la sémantique que $x_{i,j} = 1$ lorsque le sommet i est en position j dans le cycle Hamiltonien.

1. Quelles clauses faut-il ajouter afin que chaque position contienne un, et un seul, sommet ?
2. Quelles clauses faut-il ajouter afin que chaque sommet apparaisse en une, et une seule, position ?
3. Quelles clauses faut-il ajouter afin que la séquence de sommets soit bien un cycle du graphe G ?
4. Conclure que **Hamiltonien** $\leq_m^P$ **SAT**.
5. Que peut-on en déduire sur la complexité de **Hamiltonien** ?